

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

# NEJISTOTY MĚŘENÍ A STATISTICKÉ MODELY

MEASUREMENT UNCERTAINTIES AND STATISTICAL MODELS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**ZBYNĚK ŠALDA**

**VEDOUCÍ PRÁCE**  
SUPERVISOR

**ING. FRANTIŠEK VDOLEČEK, CSC.**

BRNO 2010



## **ZADÁNÍ ZÁVĚREČNÉ PRÁCE**

(na místo tohoto listu vložte originál a nebo kopii zadání Vaší práce)



## **LICENČNÍ SMLOUVA**

(na místo tohoto listu vložte vyplněný a podepsaný list formuláře licenčního ujednání)



## **ABSTRAKT**

Tato bakalářská práce se zaměřuje na nejistoty měření, hlavně potom na rozdělení pravděpodobnosti u jednotlivých typů měření pro výpočet dílčí nejistoty typu B.

## **ABSTRACT**

This thesis focuses on the measurement uncertainty, especially then the probability distribution for each type of measurement to calculate the partial uncertainty of type B.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Metrologie, měření, nejistoty, rozdělení pravděpodobnosti.

## **KEYWORDS**

Metrology, measurement, uncertainty, probability distribution.



## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych poděkoval vedoucímu práce Ing. Františku Vdolečkovi, CSc. za cenné rady a připomínky, stejně jako všem ostatním, kteří mi byli nápomocni při psaní této BP.



**OBSAH:**

	<b>Zadání závěrečné práce.....</b>	<b>3</b>
	<b>Licenční smlouva.....</b>	<b>5</b>
	<b>Abstrakt.....</b>	<b>7</b>
	<b>Poděkování.....</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Úvod.....</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Metrologie a měření.....</b>	<b>15</b>
2.1	Rozdělení metrologie.....	15
2.1.1	Průmyslová a vědecká metrologie.....	15
2.1.2	Legální metrologie.....	15
2.1.3	Fundamentální metrologie.....	16
2.2	Metody měření.....	16
2.3	Měřicí jednotky.....	17
2.3.1	Definice základních jednotek SI.....	17
2.3.2	Odvozené jednotky SI.....	18
2.4	Světové mezinárodní metrologické organizace.....	20
2.5	Evropské mezinárodní metrologické organizace.....	20
2.6	Domácí metrologické organizace.....	20
<b>3</b>	<b>Chyby a nejistoty měření.....</b>	<b>23</b>
3.1	Chyby měření.....	23
3.1.1	Zdroje chyb měření.....	23
3.1.2	Rozdělení chyb měření.....	23
3.2	Nejistoty měření.....	25
3.2.1	Základní pojmy a definice nejistot měření.....	26
3.2.2	Vyhodnocení nejistoty typu A.....	27
3.3	Vyhodnocení nejistoty typu B.....	28
3.3.1	Rámcový postup.....	28
3.3.2	Známe rozšířenou nejistotu a koeficient rozšíření.....	28
3.3.3	Známe rozpětí normálního rozdělení.....	29
3.3.4	Známe hranice vlivu zdroje.....	29
3.4	Nejistoty kombinované a rozšířené.....	30
3.5	Rozdělení pravděpodobnosti pro výpočet nejistoty typu B.....	31
<b>4</b>	<b>Statistika při analýze nejistot.....</b>	<b>35</b>
4.1	Statistické testy hypotéz.....	35
4.2	P-hodnota.....	36
4.3	Software pro testování rozdělení pravděpodobnosti.....	36
4.3.1	Minitab.....	36
4.3.2	Qc Expert.....	36
4.3.3	Statgraphics.....	37
4.3.4	Statistica.....	37
4.4	Statistické testy.....	37
4.4.1	Chí kvadrát test.....	37
4.4.2	Kolmogorov-Smirnovov test.....	38
4.4.3	Anderson-Darling test.....	39
4.5	Quantile-Quantile plot (Q-Q plot).....	40
4.6	Histogram.....	41
4.7	Identifikace odlehlých pozorování.....	42
4.7.1	Grubbsův test.....	42

<b>5</b>	<b>Analýza naměřených dat.....</b>	<b>43</b>
5.1	Naměřená data.....	43
5.2	Zhodnocení.....	43
5.2.1	Figurka posuvné měřítko.....	43
5.2.2	Figurka mikrometr.....	44
5.2.3	Dvířka obývací stěny .....	44
5.2.4	Rezistory 470 $\Omega$ .....	44
5.2.5	Rezistory 8.2 k $\Omega$ .....	44
5.2.6	Rezistory 47 k $\Omega$ .....	44
5.2.7	Rezistory 680 k $\Omega$ .....	44
5.2.8	Kalibrace vah 200 g závažím.....	44
5.2.9	Kalibrace vah 600 g závažím.....	44
5.2.10	Měření zrychlení akcelerometrem.....	45
5.2.11	Měření vibrací analyzátozem viditech.....	45
<b>6</b>	<b>Závěr.....</b>	<b>49</b>
<b>7</b>	<b>Literatura.....</b>	<b>51</b>
<b>8</b>	<b>Přílohy.....</b>	<b>53</b>
	Příloha 1: Histogramy.....	53
	Příloha 2: Měření průměru posuvkou.....	57
	Příloha 3: Měření průměru mikrometrem.....	59
	Příloha 4: Měření dvířek obývací stěny.....	61
	Příloha 5: Měření rezistorů o odporu 470 $\Omega$ multimetrem .....	63
	Příloha 6: Měření rezistorů o odporu 8,2 k $\Omega$ multimetrem .....	65
	Příloha 7: Měření rezistorů o odporu 47 k $\Omega$ multimetrem .....	67
	Příloha 8: Měření rezistorů o odporu 680 k $\Omega$ multimetrem .....	69
	Příloha 9: Kalibrace vah 200 g závažím.....	71
	Příloha 10: Kalibrace vah 600 g závažím.....	73
	Příloha 11: Měření zrychlení akcelerometrem.....	75
	Osa x .....	75
	Osa y.....	76
	Osa z .....	78
	Příloha 12: Měření vibrací analyzátozem viditech.....	80
	Měření č. 1.....	80
	Měření č. 2.....	83
	Měření č. 3.....	86
	Měření č. 4.....	89

# 1 ÚVOD

Měření, které provádíme dnes, se jen zdánlivě podobá měření, které se provádělo v jeho počátcích. Tehdy se dalo měření považovat pouze za odhad. První míry byly buď části lidského těla nebo přírody. Píď vzrostlého člověka není u všech stejná, ale nepřesahuje určitou maximální a minimální délku a proto jako odhad pro člověka nezabývajícího se podrobnostmi počítání stačila. Píď ve srovnání s ostatními délkovými jednotkami jako sáh, loket, šlápěj a palec vedla k vytvoření jakési soustavy jednotek, kdy se jedna jednotka podřizovala druhé, např. loket odpovídal třem píďím a sáh třem loktům.

Velice často se stávalo, že jednotky založené na odhadu byly nestejnorodé a bylo zapotřebí vytvořit vzorové jednotky. V jednotlivých krajích začaly vznikat i rozličné soustavy, např. provazec odpovídal 52 loktům v jednom kraji, 42 v kraji druhém. V roce 1268 král Přemysl Otakar II. obnovil všechny míry a váhy a nařídil jejich vzory cejchovat. V roce 1348 se císař Karel IV. zabýval úpravou měř a rozšířením pražských měř do celé země. Později byla vydána celá řada zemských sněmů s cílem sjednocení jednotek, např. r. 1549 Ferdinand I. Habsburský usnesení sněmu o sjednocení délkových a objemových měř a vah - cejchování, zavedení sankcí (r. 1554 bylo toto usnesení kvůli problémům s prosazováním odvoláno).

V roce 1790 ve Francii byla na návrh Francouzského Národního shromáždění ustanovena mezinárodní vědecká rada ve složení Borda, Lagrange, Laplace, Monge a Condorcet, která měla za úkol stanovení nové jednotky míry. Komise se usnesla na tom, že jednotka váhy bude gram, tj. váha jednoho kubického centimetru vody a jako jednotka délky jedna desetimilióntina zemského kvadrantu. Pro novou jednotku byl podle Borda navržen název metr z řeckého slova *metron*, což znamená metrologie. Měření probíhalo sedm let a vycházelo se z rozdílů zeměpisné šířky mezi Barcelonou a Dunkerque. Na základě jejich měření byl zhotoven etalon z platiny, jehož délka je platná při 0°C, který byl v roce 1797 uložen do státního archivu v Louvru. Nové jednotky se začaly používat od 2. listopadu 1801 a ačkoli Napoleon Bonaparte svým dekretem znovu povolil použití starých jednotek, zákon ze 4. července 1837 povinnost používat metrickou soustavu opět zavedl od 1. ledna 1840.

20. května 1875 došlo v Paříži k podepsání metrické konvence zástupci vlád sedmnácti zemí. Mezi zakládající členy patřilo i Rakousko-Uhersko. Byl založen „Mezinárodní úřad pro míry a váhy“ se sídlem v Sévres u Paříže. Cílem konvence bylo vytvoření univerzální dekadické soustavy jednotek. V roce 1874 bylo 30 tyčí profilu písmeně X vepsaného do čtverce o délce 102 cm, tyč je slitina platiny (90%) a iridia (10%). Na tyto tyče byla přenesena délka archivního metru za mezinárodní prototyp metru byl pak prohlášen metr č. 6, který nejlépe souhlasil s metrem archivním. Mezinárodní metr byl pak definován jako: „vzdálenost obou koncových rysek na prototypu, uloženém v Sévres u Paříže při teplotě 0° C, tlaku jedné atmosféry, v horizontální poloze a při podepření ve dvou bodech nejmenšího průhybu (v tzv. Besselových bodech)“. Tato definice nahradila definici pomocí zemského kvadrantu. Po rozpadu Rakouska-Uherska se v roce 1922 Československá republika stala členem metrické konvence.

V roce 1977 z důvodu neexistence jednotného mezinárodně uznávaného přístupu k provádění odhadů a stanovení nejistot měření vydal Mezinárodní výbor pro míry a váhy (CIPM) zakázku na vyřešení tohoto problému Mezinárodnímu úřadu pro míry a váhy (BIML). V roce 1980 bylo vydáno doporučení INC-1 „Vyjadřování experimentálních nejistot“. Doporučení bylo schváleno CIPM v roce 1986.

V říjnu 1999 podepsali ředitelé národních metrologických institucí průmyslových zemí ujednání o vzájemném uznávání státních etalonů a kalibračních certifikátů vydaných národními metrologickými instituty.



## 2 METROLOGIE A MĚŘENÍ

Metrologie je vědní disciplína, která se zabývá měřením a poznatky z oblasti měření.

### 2.1 Rozdělení metrologie

V Evropské unii se metrologie dělí do tří stupňů složitosti, oblasti použití a přesnosti:

- Vědecká metrologie se zabývá organizací, uchováváním a vývojem etalonů.
- Průmyslová metrologie zajišťuje fungování měřidel používaných v průmyslu a ve výrobních a zkušebních procesech.
- Legální metrologie se zabývá přesností měření tam, kde měření mají vliv na zdraví, bezpečnost a průhlednost ekonomických transakcí.

Fundamentální metrologie není v mezinárodním měřítku definována, avšak představuje nejvyšší úroveň přesnosti v dané oblasti. Lze ji proto popsat jako vědeckou metrologii doplněnou o ty části legální a průmyslové metrologie, které vyžadují vědeckou kompenzaci. [1][2]

#### 2.1.1 Průmyslová a vědecká metrologie

Metrologická činnost, měření a zkoušení představují cenné vstupy pro problematiku jakosti v průmyslové činnosti. Patří sem potřeby návaznosti, které se stávají stejně důležité jako vlastní měření. Uznání metrologické kompetence na každém stupni řetězce návaznosti lze dosáhnout ujednáními a ujednáními o vzájemném uznávání. [1][2]

#### 2.1.2 Legální metrologie

Legální metrologie vznikla původně z potřeby zajistit poctivý obchod.

Hlavním cílem legální metrologie je ochrana obyvatel před následky nesprávných měření v úřadech či obchodním styku, ve veřejném sektoru, zdravotnictví a bezpečnosti. Proto zákon stanoví požadavky na:

- měřidla,
- metody měření a zkoušení,
- hotově balené zboží.

Lidé používající výsledky měření v aplikační oblasti legální metrologie nemusí být odborníci v metrologii. Proto za věrohodnost takovýchto měření přebírá odpovědnost stát. Přístroje musí zaručovat správné výsledky měření:

- provozních podmínek,
- během celého období používání,
- v hranici dovolených chyb.

Na celém světě jsou pro tyto uvedené oblasti stanoveny národní právní požadavky na měřidla a jejich použití. Patří sem preventivní a represivní použití.

*Preventivní opatření* - vykonávají se ještě před uvedením přístroje na trh, což znamená, že zařízení musí mít zkoušku typu a musí být ověřené. Schválení typu provádí kompetentní orgán, ve většině zemí úřad, daný typ musí splňovat všechny příslušné zákonné požadavky. V případě sériově vyráběných měřidel musí být ověřeno, že každé zařízení splňuje všechny požadavky stanovené ve schvalovacím řízení.

*Represivní opatření* - dohled a kontrola trhu na zajištění nelegálního používání měřidel. Etalony používané na tyto kontroly musí mít návaznost na národní a mezinárodní etalony.

### Harmonizace

Evropská harmonizace se zakládá na Směrnici 71/316/EEC, která obsahuje požadavky na všechny kategorie měřidel a z ostatních směrnic na jednotlivé kategorie měřidel, které byly vydány od roku 1971. Měřidla, která získala zkoušku typu a prvotní ověření EHS lze uvádět na trh a používat ve všech členských státech bez dalšího schvalování či zkoušek.[1][2]

### 2.1.3 Fundamentální metrologie

Fundamentální metrologie se člení na 11 oborů:

- hmotnost
- elektřina
- délka
- čas a frekvence
- termometrie
- ionizující záření a radioaktivita
- fotometrie a radiometrie
- průtok
- akustika
- látkové množství
- interdisciplinární metrologie

Těchto 11 oborů si stanovil EUROMET. Interdisciplinární metrologie není chápána jako technický obor, zabývá se technickými otázkami.[1][2]

## 2.2 Metody měření

Měřením rozumíme soubor činností, které mají za úkol stanovit hodnoty veličiny.

**Přímé měření** - v případě přímého měření se hodnota měřené veličiny získá přímo bez nutnosti měření dalších veličin, které mají funkční závislost s měřenou veličinou. Za přímou metodu se považuje i fakt, kdy stupnice je opatřena konvenčními hodnotami (dílký, %) vázanými na příslušné hodnoty pomocí tabulek či grafů. Příklady přímé metody: stanovení hmotnosti na mechanických váhách, měření teploty dilatačním teploměrem, měření délky metrem.

**Nepřímé měření** - je metoda měření, kde se měřená hodnota získá měřením jiných veličin funkčně závislých s měřenou veličinou. Příklady nepřímé metody: měření teploty odporovým teploměrem, měření odporu tělesa na základě měření proudu a napětí, měření hustoty tělesa na základě měření objemu a hmotnosti.

Podle způsobu měření se měřící dělí na dvě části:

a) Absolutní měřící metodu, která se zakládá na měření veličin obsažených v definici měřené veličiny. Používá se k měření základních veličin.

b) Porovnávací měřící metodu, při které se porovná hodnota měřené veličiny se známou hodnotou veličiny stejného druhu a nebo veličiny jiného druhu, která se dá transformovat na druh měřené veličiny.

Porovnávací metody se dále měří podle techniky měření:

- 1) *Přímá porovnávací metoda* - měřená veličina se přímo porovnává se známou hodnotou veličiny stejného druhu, např. měření hmotnosti na rovnoměrných vahách.
- 2) *Nepřímá porovnávací metoda* - porovnáváme známé hodnoty jiné veličiny závislé na měřené veličině funkčním vztahem, např. měření tlaku deformačním tlakoměrem.
- 3) *Substituční metoda* - měřená veličina se nahradí veličinou stejného druhu se známou hodnotou, která se vyhledá tak, aby byly stejné údaje na indikačních zařízeních, např. koncové měřky u měření délek.
- 4) *Kompenzační metoda* - účinek neznámé hodnoty veličiny vyrušíme účinkem stejné veličiny, jejíž hodnotu známe, např. měření elektrického odporu kompenzátořem.
- 5) *Diferenční metoda* - měřená veličina se porovnává s veličinou stejného druhu a známé hodnoty, která se jen velmi málo liší od hodnoty měřené, přičemž se určuje rozdíl mezi nimi, např. vážení na rovníramenných vahách pomocí závaží.
- 6) *Nulová metoda* - hodnota měřené veličiny se stanoví na základě rovnováhy nastavené jednou a nebo několika veličinami známých hodnot. Vztah s měřenou veličinou při rovnováze je známý, např. vážení na decimálce, měření odporu pomocí mostíku. [1]

### 2.3 Měřicí jednotky

Myšlenka metrické soustavy se datuje od roku 1799, kdy ve Francii za dob revoluce byly vytvořeny referenční etalony míry a váhy. V roce 1946 pak členské země metrické konvence přijaly soustavu MKSA (metr, kilogram, sekunda, ampér). V roce 1954 byla soustava rozšířena o kelvin a kandela a celá soustava poté dostala název Mezinárodní soustava jednotek SI (*le Système international d'unités*) [2]

Soustavu SI tvoří sedm základních jednotek.

Tabulka 2.1: Základní jednotky SI

Veličina	Základní jednotka	Značka
délka	metr	m
hmotnost	kilogram	kg
čas	sekunda	s
elektrický proud	ampér	A
termodynamická teplota	kelvin	K
látkové množství	mol	mol
svítivost	kandela	cd

#### 2.3.1 Definice základních jednotek SI

**Metr** je délka dráhy, kterou proběhne světlo ve vakuu za  $1/299\,792\,458$  sekundy.

**Kilogram** je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu, uchovaného v Mezinárodním úřadě pro váhy a míry (BIPM) v Sévres,

**Sekunda** je doba rovnající se  $9\,162\,631\,770$  periodám záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu atomu cesia 133.

**Ampér** je stálý elektrický proud, který při průchodu dvěma rovnoběžnými, přímými, nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 mm vyvolá mezi nimi stálou silou rovnou  $2 \times 10^{-7}$  newtonu na 1 metr délky vodičů.

**Kelvin** je 1/273.16 díl termodynamické teploty trojného bodu vody.

**Mol** je látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců (entit), kolik je atomů v 0,012 kg nuklidu uhlíku  $^{12}\text{C}$ . Při udávání látkového množství je třeba elementární entity specifikovat; mohou to být atomy, molekuly, ionty, elektrony, jiné částice či seskupení částic.

**Kandela** je svítivost zdroje, který v daném směru vysílá monochromatické záření o kmitočtu  $540 \times 10^{12}$  hertzů a jehož zářivost v tomto směru je 1/683 wattu na steradián.

### 2.3.2 Odvozené jednotky SI

Tabulka 2.2: Příklady odvozených jednotek SI

Odvozená veličina	Odvozená jednotka	Značka
plocha	čtvereční metr	$\text{m}^2$
objem	krychlový metr	$\text{m}^3$
rychlost	metr za sekundu	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
zrychlení	metr za sekundu na druhou	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
úhlová rychlost	radián za sekundu	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
úhlové zrychlení	radián za sekundu na druhou	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$
hustota	kilogram na krychlový metr	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
intenzita magnetického pole	ampér na metr	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
hustota elektrického pole	ampér na metr čtvereční	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
moment síly	newton metr	$\text{N} \cdot \text{m}$
intenzita elektrického pole	volt na metr	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$
permeability	henry na metr	$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$
permitivita	farad na metr	$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$
měrná tepelná kapacita	joule na kilogram kelvin	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
koncentrace látkového množství	mol na krychlový metr	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$
jas	kandela na čtvereční metr	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$

Tabulka 2.3: Odvozené jednotky s vlastním názvem a symbolem

Název veličiny	Odvozená jednotka		Vyjádření	
	Vlastní název	Značka	V jednotkách SI	V základních jednotkách SI
kmitočet	Hertz	Hz		$s^{-1}$
síla	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
tlak, mechanické napětí	Pascal	Pa	$N/m^2$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
energie, práce, mn. tepla	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
výkon, zářivý tok	watt	W	$J/s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
elektrický náboj, množství elektřiny	coulomb	C		$s \cdot A$
rozdíl elektrického potenciálu, elektromotorická síla	volt	V	$W/A$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
elektrická kapacita	farad	F	$C/V$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
elektrický odpor	ohm	$\Omega$	$V/A$	$m^2 \cdot kg \cdot s^3 \cdot A^{-2}$
elektrická vodivost	siemens	S	$A/V$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
magnetický tok	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
magnetická indukce, hustota magnetického toku	tesla	T	$Wb/m^2$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
indukčnost	henry	H	$Wb/A$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
světelný tok	lumen	lm	$cd \cdot sr$	$m^2 \cdot m^{-2} \cdot cd = cd$
osvětlení	lux	lx	$lm/m^2$	$m^2 \cdot m^{-4} \cdot cd = m^{-2} \cdot cd$
aktivita (radionuklidu)	becquerel	Bq		$s^{-1}$
absorbovaná dávka, energie odevzdaná látce, kerma	gray	Gy	$J/kg$	$m^{-2} \cdot s^{-2}$
dávkový ekvivalent	sievert	Sv	$J/kg$	$m^{-2} \cdot s^{-2}$
rovinný úhel	radián	rad		$m \cdot m^{-1} = 1$
prostorový úhel	steridián	sr		$m^2 \cdot m^{-2} = 1$

## 2.4 Světové mezinárodní metrologické organizace

- **Generální konference vah a měř CGPM** (z francouzského *Conférence Générale des Poids et Mesures*), která se skládá ze všech států Metrické konvence. Schází se jednou za čtyři roky.
- **Mezinárodní výbor pro váhy a míry CIPM** (z francouzského *Comité International des Poids et Mesures*) výbor se skládá z 18 členů a při každé konferenci se obnovuje polovina členů volbou. Členství v CIPM je čestné a jeho členové nezastupují stát. CIPM je podřízena Generální konferenci vah a měř.
- **Mezinárodní úřad pro váhy a míry BIPM** (z francouzského *Bureau International des Poids et Mesures*). Úřad vznikl spolu s Metrickou konvencí, jeho činnost je financována členskými státy Metrické konvence. BIPM sídlí v Sévres u Paříže a je vědeckou institucí.
- **Mezinárodní organizace pro legální metrologii OILM** - mezinárodní organizace pro legální metrologii založená dohodou v roce 1955. Mezi její hlavní cíle patří vytváření modelových návrhů zákonů v oblasti měřidel. [2]

## 2.5 Evropské mezinárodní metrologické organizace

- **EUROMET** - organizace pro spolupráci evropských metrologických ústavů založená v roce 1983. V současné době má 23 členů a další země se ucházejí o členství. Euromet je hlavní metrologická organizace v Evropě a je orgánem Evropské komise.
- **Eurolab** je federace organizací národních laboratoří, sdružujících kolem 2000 laboratoří. Eurolab je dobrovolná organizace, která podporuje technicky i politicky organizace laboratoří koordinováním akcí vztahujících se například k Evropské komisi, evropské standardizaci a mezinárodním záležitostem.
- **COOMET** - organizace národních metrologických institutů střední a východní Evropy založená v roce 1991.
- **Evropská spolupráce v akreditaci (EA)** je hlavní organizace akreditačních orgánů v Evropě vytvořená na základě mnohostranné dohody a založená na vzájemně rovnocenném posuzovacím systému. EA zahrnuje 15 národních akreditačních orgánů a má dvoustranné dohody s obdobnými orgány v několika dalších zemích. Hlavním účelem je, aby zkoušky a kalibrace u jedné akreditované laboratoře v jedné členské zemi, byly uznávány úřady a průmyslem ve všech ostatních členských zemích.
- **Eurachem** je sdružení evropských analytických laboratoří. Eurachem spolupracuje s EUROMETem při vytváření referenčních laboratoří, používání referenčních materiálů a návaznosti na mol. [2]

## 2.6 Domácí metrologické organizace

- **ÚNMZ** - úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví je organizační složkou státu v resortu Ministerstva průmyslu a obchodu ČR. Hlavním posláním je zabezpečovat úkoly vyplývající ze zákonů České republiky upravujících technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví a úkoly v oblasti technických předpisů a norem uplatňovaných v rámci ČR a Evropské unii.
- **ČMI** - Český metrologický institut zabezpečuje jednotnost a přesnost měřidel ve všech oblastech vědecké, technické a hospodářské činnosti.

- **ČIA** - Český institut pro akreditaci je Národní akreditační orgán založený vládou České republiky. V souladu s požadavky mezinárodních norem a dokumentů ČIA provádí posouzení způsobilosti pro laboratoře a certifikační orgány.
- **ČNI** - Český normalizační institut
- **ČSN** - Česká státní norma



### 3 CHYBY A NEJISTOTY MĚŘENÍ

#### 3.1 Chyby měření

Jakákoliv měřicí metoda, či jakékoliv měření není nikdy absolutně přesné. Jednotlivé negativní vlivy, které se v průběhu měření vyskytují mají vliv na naměřenou hodnotu. Výsledek měření se pak pouze přibližuje skutečné naměřené hodnotě. Absolutní chyba  $\Delta_x$  je chyba, která vyjadřuje rozdíl mezi hodnotou naměřenou  $x_m$  a skutečnou  $x_s$ .

$$\Delta_x = x_m - x_s \quad (3.1)$$

Pokud navíc podělíme absolutní chybu skutečnou hodnotou, dostaneme poměrné vyjádření chyby tj. chyba relativní  $\delta_x$ .

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{x_s} = \frac{x_m - x_s}{x_s} \quad (3.2)$$

##### 3.1.1 Zdroje chyb měření

- **Přístrojové chyby** jsou chyby nedokonalosti měřících prostředků. Část těchto chyb vzniká při výrobě (výrobní odchylky jednotlivých dílů, nepřesnost montáže). Hodnoty některých chyb udává výrobce formou korekčních křivek, či maximálně dovolenou chybou.
- **Chyby instalace** - chyby vyplývající z nedostatečného zapojení, uložení a nastavení měřidel, ze vzájemného ovlivňování měřidel zapojených sériově či paralelně.
- **Chyby metody** - chyby způsobené z nedokonalosti použité měřicí metody, z použití přibližných hodnot fyzikálních konstant a nepřesně odpovídajících závislostí.
- **Chyby pozorování** - chyby způsobené nedokonalostí obsluhy měřicího zařízení.
- **Chyby výpočtové** - chyby vznikající zpracováním naměřených hodnot (linearizace, zaokrouhlování, použití přibližných vztahů apod.). [1]

##### 3.1.2 Rozdělení chyb měření

Chyby měření dělíme podle jejich vlivu na výsledek měření:

- chyby náhodné,
- chyby systematické,
- chyby hrubé.

**Náhodné chyby** jsou chyby, které se objevují zcela nahodile, nepředvídatelně a nelze je zcela vyloučit. Jejich absolutní hodnota a znaménko se mění podle zákona rozdělení pravděpodobnosti. U náhodných chyb lze jen odhadnout jejich pravděpodobnostní charakteristiky.

Pokud budeme nezávisle měřit tu stejnou veličinu  $X$  za stejných podmínek, budeme kvůli náhodným chybám dostávat různé údaje  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Jako výsledek měření čili odhad skutečné hodnoty měření se bere aritmetický průměr.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.3)$$

kde  $n$  je počet opakovaných měření.

Rozdíl  $e_i = x_i - \bar{x}$

je odhad náhodné chyby  $i$ -tého měření.

Náhodnou chybu v klasické teorii chyb nejčastěji zastupuje směrodatná odchylka výběrového souboru  $s$ , méně často odchylka aritmetického průměru  $s_{\bar{x}}$ .

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{xi}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (3.4)$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (3.5)$$

Směrodatná odchylka charakterizuje, jak jsou výsledky měření (náhodné chyby) rozptýlené.

**Systematické chyby** jsou chyby jejichž hodnota se při stejných podmínkách nemění. Velikost systematické chyby je konstantní a znaménko se mění podle určité (známé) závislosti. Systematickou chybu nelze charakterizovat na základě opakovaných měření. Systematické chyby se snažíme zjistit a odstranit následujícím způsobem:

- odstranění příčin, které vyvolávají systematické chyby,
- vhodnou kompenzací,
- uplatněním korekcí.

Pokud systematická chyba pochází z více zdrojů a známe její jednotlivé hodnoty  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ , pak celková systematická chyba je rovna součtu jednotlivých chyb.

$$\delta = \sum_{i=1}^m \delta_i \quad (3.6)$$

**Hrubé chyby** jsou zcela nevyzpytatelné chyby, které mohou znehodnotit celý experiment. Projevují se jako naměřené hodnoty výrazně odlišné od většiny naměřených hodnot a proto tyto odlišné hodnoty vyloučíme z dalšího zpracování. K eliminaci výskytu hrubých chyb lze dojít důsledným dodržováním měřících postupů, podmínek měření a pozorností obsluhy. [1][9]

Celková chyba měření je pak součtem náhodné  $\Delta$  a systematické chyby  $\delta$  :

$$\Delta_c = \Delta + \delta \quad (3.7)$$

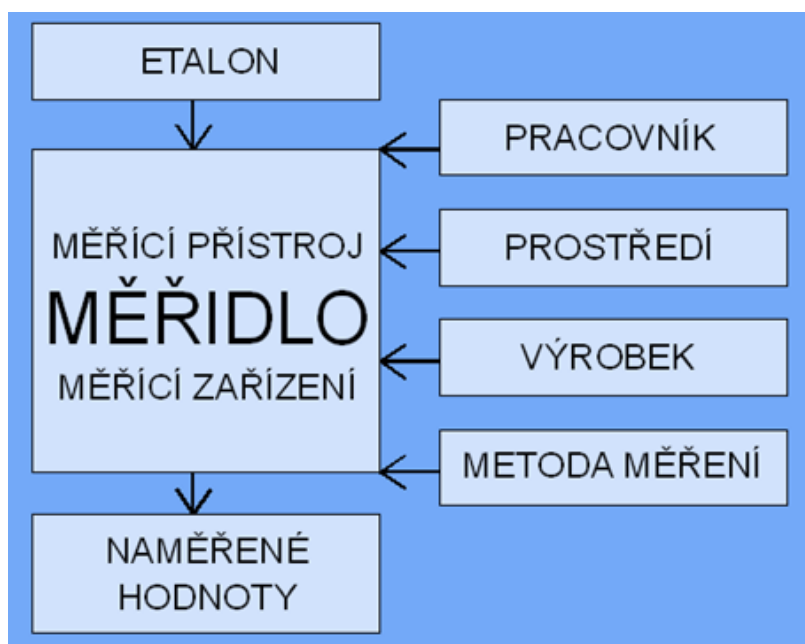
### 3.2 Nejistoty měření

Pojem nejistota měření je označení pro parametr, který souvisí s výsledky měření a charakterizuje rozsah, který je možný racionálně přidělit k měřené veličině. Nejistoty měření byly uvedeny do běžné praxe přibližně v roce 1990 dokumentem WEC 19/90, který popisoval jednotné vyjádření nejistot měření.

Při určování nejistot měření vycházíme z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, kde je předpoklad, že se měřené hodnoty jako i chyby řídí určitým rozdělením pravděpodobnosti. Potom i výsledek měření má určité rozdělení pravděpodobnosti.

Vyjádření výsledku měření včetně nejistoty měření umožňuje srovnání s jinými laboratořemi, či podniky. Je uznáván mezinárodně a umožňuje jednotnou interpretaci výsledků. Nejistota měření je parametr přidružený k výsledku měření - střední hodnotě. Charakterizuje rozptyl hodnot, které jsou přisuzovány naměřené veličině s určitou pravděpodobností. Každé měření je zatíženo chybami měření a tak hovoříme o nejistotě měření. [1][8][9] Nejistotu měření způsobuje:

- měřidlo
- pracovník
- prostředí
- etalon
- výrobek - součást
- metoda měření



Obr. 3.1: Proces měření [8]

### 3.2.1 Základní pojmy a definice nejistot měření

Tabulka 3.1: Základní pojmy a definice nejistot měření [9]

<b>Aritmetický průměr</b> - součet hodnot podělený počtem hodnot.
<b>Koeficient citlivosti související se vstupním odhadem</b> - změna hodnot výstupního odhadu jako důsledek změny hodnot vstupního odhadu podělená změnou hodnot tohoto výstupního odhadu.
<b>Koeficient pokrytí</b> - číselný faktor, kterým se násobí standardní nejistota měření s cílem zjistit rozšířenou nejistotu měření.
<b>Konfidenční pravděpodobnost</b> - podíl, obvykle velký, hodnot z rozdělení, které je možné přiřadit měřené veličině jako výsledek měření.
<b>Korelace</b> -vztah mezi dvěma nebo větším počtem náhodných veličin v rámci rozdělení dvou nebo většího počtu náhodných veličin.
<b>Koeficient korelace</b> - míra relativní vzájemné závislosti dvou náhodných veličin rovnající se podílu jejich kovariance a kladné odmocniny součinu jejich rozptylu.
<b>Kovariance</b> - míra vzájemné závislosti dvou náhodných veličin rovnající se střední hodnotě součinu odchylek dvou náhodných veličin od jejich středních hodnot.
<b>Metoda vyhodnocení typu A</b> - metoda vyhodnocení nejistoty měření pomocí statistické analýzy série měření.
<b>Metoda vyhodnocení typu B</b> - metoda vyhodnocení nejistoty měření jiným způsobem, než je statistická analýza série měření.
<b>Měřená veličina</b> - konkrétní veličina, která je předmětem měření.
<b>Náhodná veličina</b> - veličina, která může nabývat libovolné hodnoty z určité množiny hodnot a je charakterizována rozdělením pravděpodobnosti.
<b>Nejistota měření</b> - parametr, který souvisí s výsledkem měření a charakterizuje rozsah hodnot, jež je možné racionálně přiřadit k měřené veličině. Často se používá také zkrácený název <b>nejistota</b> .
<b>Nejlepší měřicí schopnost</b> - nejmenší nejistota měření, kterou může laboratoř dosáhnout v rámci předmětu své akreditace, když vykonává více méně rutinní kalibrace téměř ideálních etalonů s cílem definovat, realizovat, zachovat nebo reprodukovat jednotku dané veličiny, jednu nebo několik jejich hodnot.
<b>Pravá (skutečná) hodnota veličiny</b> - hodnota, která je ve shodě s definicí dané blíže určené veličiny (hodnota získána naprosto přesným měřením)
<b>Průřezový odhad rozptylu</b> - odhad výběrového rozptylu získaný z dlouhé série měření stejné měřené veličiny za stejných podmínek.
Vstupní odhad - hodnota odhadu vstupní veličiny používaná při vyhodnocení výsledku měření.
<b>Vstupní veličiny</b> a) veličiny jejichž hodnota a nejistota se určí přímo měřením. b) veličiny jejichž hodnota a nejistota vstupují do měření z vnějších zdrojů.
<b>Výstupní odhad</b> - výsledek měření vypočítaný ze vstupních odhadů pomocí funkce modelu měření.
<b>Výstupní veličina</b> - veličina, která při vyhodnocení měření představuje měřenou veličinu.
<b>Relativní standardní nejistota měření</b> - standardní nejistota veličiny podělena odhadem této veličiny.

<b>Rozdělení pravděpodobnosti</b> - funkce vyjadřující pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude určité hodnoty nebo hodnoty z jistého intervalu.
<b>Rozptyl</b> - střední hodnota druhé mocniny odchylky náhodné veličiny od její střední hodnoty.
<b>Rozšířená nejistota</b> - veličina definující interval okolo výsledku měření, který zahrnuje velkou část rozdělení hodnot, jež je možné přiřadit k měřené veličině.
<b>Směrodatná odchylka</b> - druhá odmocnina rozptylu.
<b>Standardní nejistota měření</b> - nejistota měření vyjádřená jako směrodatná odchylka.
<b>Výběrová směrodatná odchylka</b> - druhá odmocnina výběrového rozptylu.
<b>Výběrový rozptyl</b> - veličina charakterizující rozptýlení výsledků série $n$ pozorování stejné měřené veličiny získaná jako druhá mocnina vztahu (3.4)

### 3.2.2 Vyhodnocení nejistoty typu A

Jedná se o kvantitativní charakteristiku nejistoty měření. Vyhodnocení nejistoty typu A je založeno na statistické analýze naměřených údajů. Pokud budeme měřit dostatečně přesným měřicím přístrojem za předpokladu, že se po dobu měření nemění měřená veličina, ani podmínky, které můžou ovlivnit měření, stále bude při odečtení patrný jistý rozptyl.

Potom bude pro  $n$  naměřených hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  odhad hodnoty měřené veličiny daný vztahem:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.8)$$

Standardní nejistota typu A tohoto odhadu se rovná výběrové směrodatné odchylce aritmetického průměru, tedy:

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.9)$$

Předpoklad pro výpočet nejistoty typu A je je dostatečný počet měření. Pro nedostatečný počet měření ( $n < 10$ ) je potřeba provést doplňkovou korekci, která zohlední nedostatečný počet měření:

$$u_A = k_s \cdot s(\bar{x}) \quad (3.10)$$

kde  $k_s$  je koeficient závislý na počtu měření viz tabulka.

n	9	8	7	6	5	4	3	2
$k_s$	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7

Pro  $n > 9$   $k_s = 1$ . [1][8][10]

### 3.3 Vyhodnocení nejistoty typu B

Vyhodnocování nejistoty typu B je získáno jinak, než statistickým vyhodnocením výsledků opakovaných měření. Standardní nejistota se odhaduje pomocí racionálního úsudku na základě všech možných a dostupných informací. Nejčastěji se používají:

- údaje výrobce měřicí techniky,
- zkušenosti z předchozích sérií měření,
- zkušenosti s vlastnostmi chování materiálů a techniky a poznatky o nich,
- údaje získané při kalibraci a z certifikátů,
- nejistoty referenčních údajů v příručkách.

Pro určení nejistot je potřeba také určit všechny možné zdroj nejistot. Jednotlivé zdroje mohou být:

- vlivy vázané na použité přístroje, etalony a vybavení,
- vlivy okolního prostředí a jejich změny,
- vlivy metody,
- vlivy operátora,
- ostatní vlivy.

#### 3.3.1 Rámcový postup

- 1) Vytipují se možné zdroje nejistot  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p$ .
- 2) Určí se standardní nejistota vlivem každého zdroje převzetím z certifikátů, technické dokumentace, norem, kalibračních listů atd.
- 3) Posoudí se korelace mezi jednotlivými zdroji.
- 4) Určí se vztah mezi veličinou  $X$  a jednotlivými zdroji  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p$ .

$$X = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p) \quad (3.11)$$

- 5) S použitím zákona šíření nejistot (3.12) se pro funkci (3.11) vypočítá nejistota  $u_B(x)$ .

$$u^2(x) = \sum_{q=1}^m A_q^2 u_q^2(x) \quad (3.12)$$

kde  $A_q$  jsou koeficient citlivosti.

#### 3.3.2 Známe rozšířenou nejistotu a koeficient rozšíření

Známe-li koeficient rozšíření  $k_r$  a rozšířenou nejistotu  $U$  např. z certifikátu nebo dokumentace od výrobce, potom se stanoví standardní nejistota typu B vlivem daného zdroje  $Z_j$  jako:

$$u_b(Z_j) = \frac{U}{k_r} \quad (3.13)$$

### 3.3.3 Známe rozpětí normálního rozdělení

Je-li známo rozpětí (délka intervalu  $2U$ ), v němž se nachází většina hodnot a domníváme se, že při určování tohoto intervalu bylo uvažováno normální rozdělení, lze nejistotu  $u_B(Z_j)$  určit jako:

$$u_B(Z_j) = \frac{U}{k_p} \quad (3.14)$$

kde  $k_p$  koeficient rozšíření normálního rozdělení o parametrech  $N(0;1)$  pro pravděpodobnost  $P$ .

### 3.3.4 Známe hranice vlivu zdroje

Není-li možné odhadnout jen hranice ve kterém se hodnoty měřené veličiny nacházejí vlivem působení daného zdroje téměř na 100% postupuje se takto:

- 1) Vytypují se všechny možné zdroje nejistot  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p$ .
- 2) Je-li známa maximální odchylka  $j$ -tého zdroje nejistoty  $Z_{jmax}$  určí se nejistota  $u_b(z_j)$  podle vztahu:

$$u_b(z_j) = \frac{Z_{jmax}}{k} \quad (3.15)$$

kde  $k$  je součinitel vycházející ze zákona rozdělení, kterým se příslušný zdroj nejistoty řídí.

Výsledná nejistota typu B se pro  $p$  zdrojů  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_p$  se určí podle vztahu:

$$u_{bx} = \sqrt{\sum_{j=1}^p A_j^2 u_{bzj}^2} \quad (3.16)$$

kde  $u_{bzj}$  jsou nejistoty jednotlivých zdrojů.

$A_j$  jsou součinitele citlivosti jednotlivých zdrojů.

Takto se nejistota vyhodnocená metodou B převede do zcela nové podoby a i nejistoty typu B získávají charakter směrodatné odchylky.[1][8][10]

### 3.4 Nejistoty kombinované a rozšířené

Za předpokladu, že mezi zdroji nejistot vyhodnocenými metodou A a metodou B není žádná závislost, určí se celková (kombinovaná) nejistota vztahem

$$u_c(y) = \sqrt{u_a^2(y) + u_b^2(y)} \quad (3.17)$$

Standardní kombinovaná nejistota  $u_c$  byla určena pro pravděpodobnost  $P=68\%$ , což odpovídá koeficientu  $k_r=1$ . Pro dosažení lepšího intervalu pokrytí blížícímu se 100% se používá rozšířená nejistota podle vztahu:

$$U = k_r \cdot u \quad (3.18)$$

kde  $U$  je rozšířená nejistota  
 $k_r$  je koeficient rozšíření  
 $u$  je standardní nejistota

Jednotlivé hodnoty koeficientu  $k_r$  udává tabulka 3.2.

Tabulka 3.2: koeficienty rozšíření

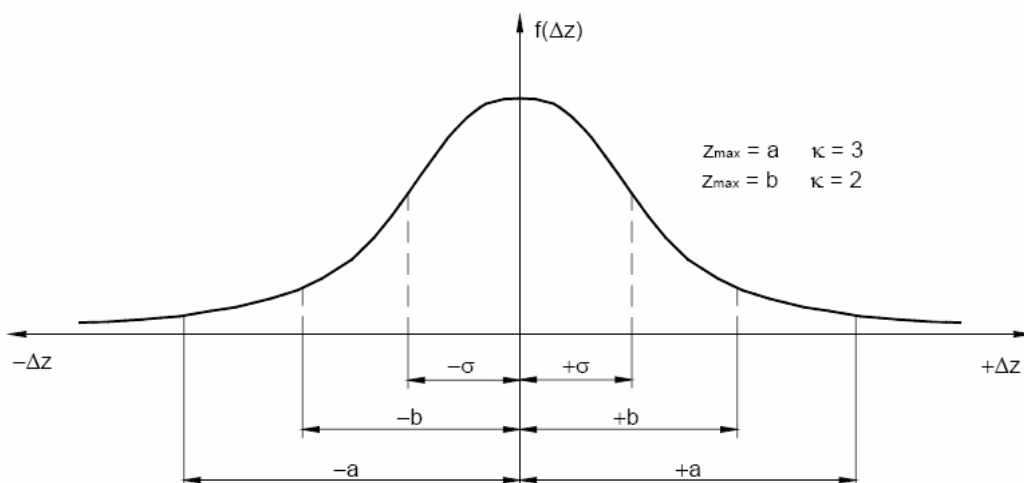
Koeficient rozšíření $k_r$	Pravděpodobnost $P$
1	68,00%
2	95,00%
2,58	99,00%
3	99,70%

V praxi se uvádí nejistota výsledku měření rozšířená koeficientem rozšíření  $k_r=2$ , což u normálního rozlišení odpovídá pravděpodobnosti pokrytí asi 95%. [10]

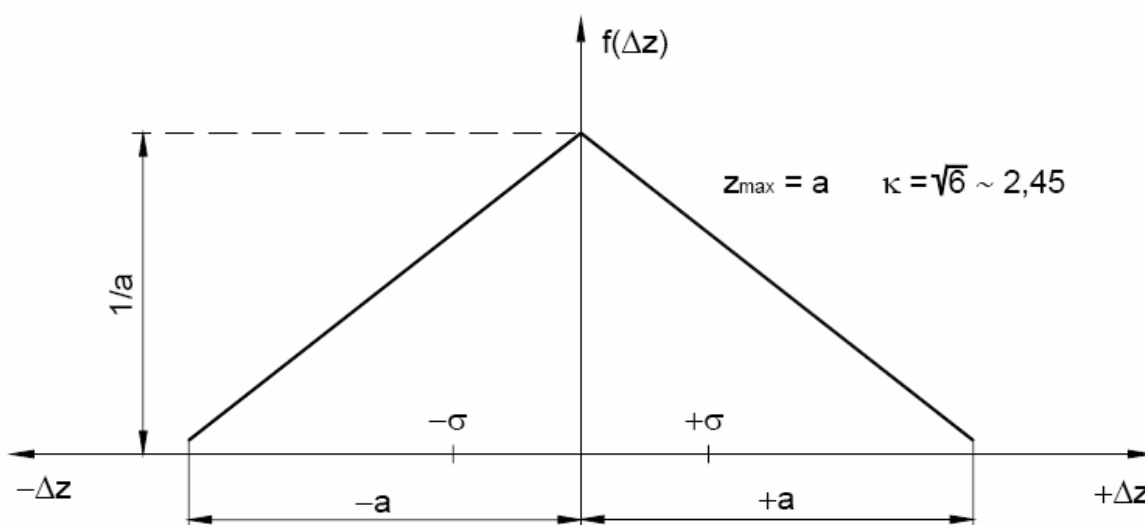
### 3.5 Rozdělení pravděpodobnosti pro výpočet nejistoty typu B

Jak již bylo zmíněno v kapitole 3.2, řídí se výskyt nejistot či naměřených hodnot určitým rozdělením pravděpodobnosti. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny je pravidlo, které každému jevu popsanému touto veličinou přiřadí určitou pravděpodobnost. Pro analýzu nejistot měření se nejčastěji používá šest rozdělení pravděpodobnosti:

- Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti
- Trojúhelníkové (Simpsonovo) rozdělení pravděpodobnosti
- Bimodální - trojúhelníkové rozdělení
- Bimodální - Diracovo rozdělení
- Rovnoměrné (pravoúhlé) rozdělení
- Lichoběžníkové rozdělení

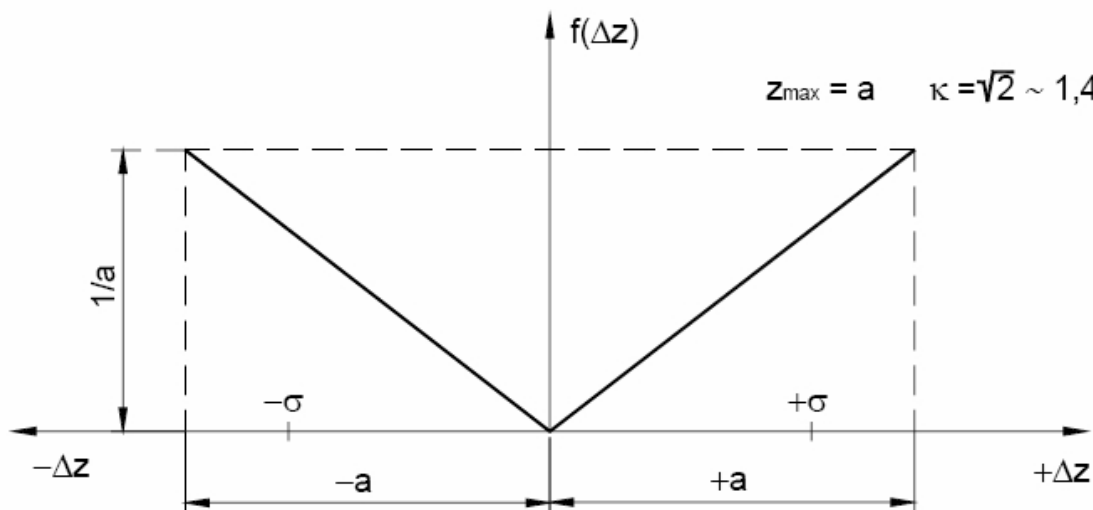


Obr. 3.2: Normální (Gaussovo) rozdělení

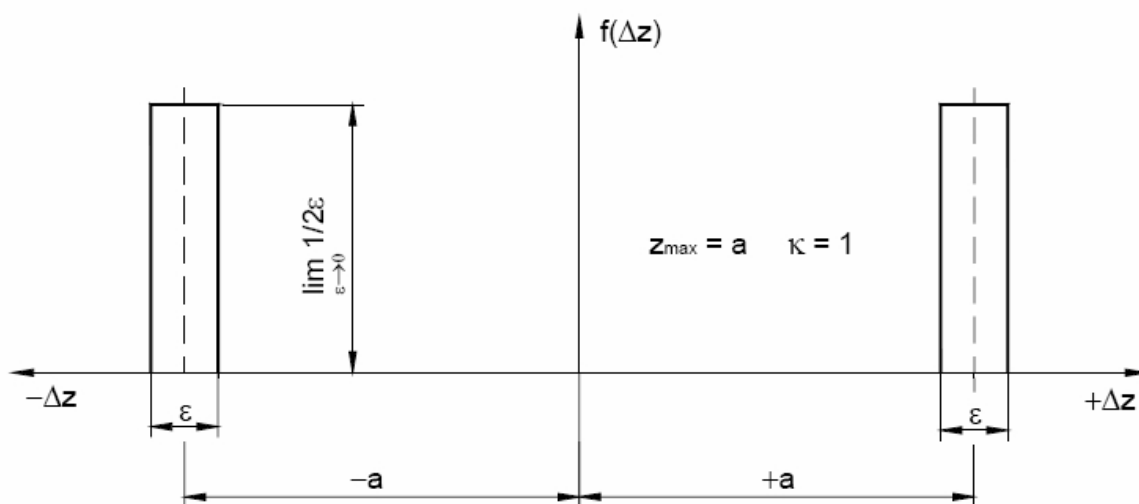


Obr. 3.3: Trojúhelníkové (Simpsonovo) rozdělení

Normální (Gaussovo) rozdělení s  $k=3$ , trojúhelníkové (Simpsonovo) rozdělení s  $k=2,45$  a normální rozdělení s  $k=2$  dávají možnost volby pro takové případy, kdy je pravděpodobnost malých či velmi malých odchylek značná, zatímco pravděpodobnost velkých odchylek rovných mezím je zanedbatelná (pak  $k=3$ ) nebo velmi malá (pak  $k=2$ ). Normální rozdělení se též předpokládá pro výsledek výpočtu nejistoty typu A, případně pro výsledek výpočtu kombinované standardní nejistoty (kdy podle centrální limitní věty má rozdělení vzniklé složením několika obecných rozdělení charakter normálního rozdělení). Simpsonovo rozdělení lze použít například u specifikace stability v době mezi kalibracemi, pokud je dlouhodobým sledováním potvrzeno, že skutečné chyby jsou prakticky stále podstatně nižší, než výrobcem uváděné hodnoty.



Obr. 3.4: Bimodální - trojúhelníkové rozdělení

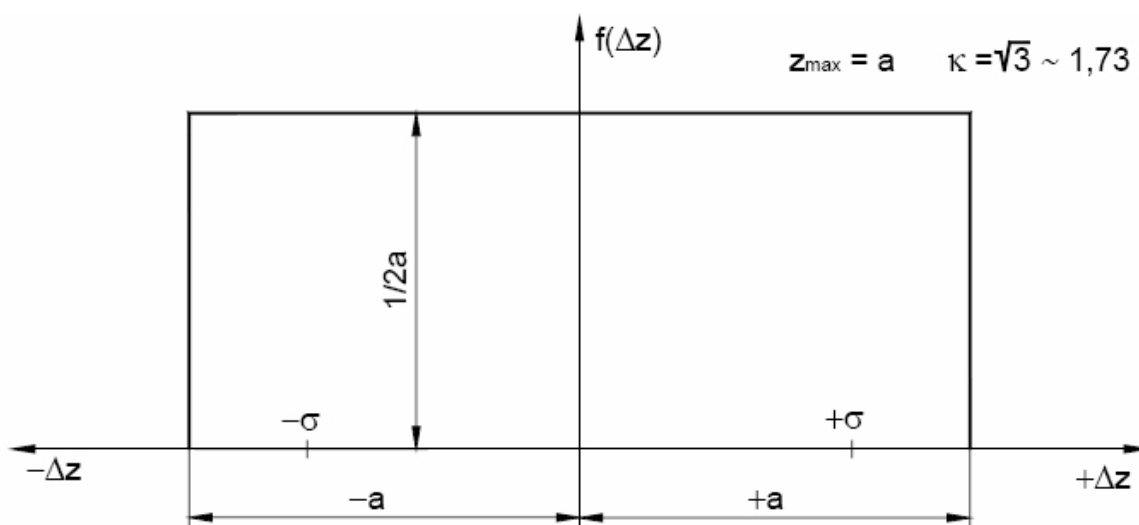


Obr. 3.5: Bimodální - Diracovo rozdělení

V opačném případě, kdy je buď pravděpodobnost odchylek blízka mezím velká a klesá ke správné hodnotě, nebo prakticky vždy dosahují některé z mezních hodnot, se volí Bimodální (trojúhelníkové) rozdělení  $k = \sqrt{2}$  resp. Bimodální (Diracovo) rozdělení  $k=1$ .

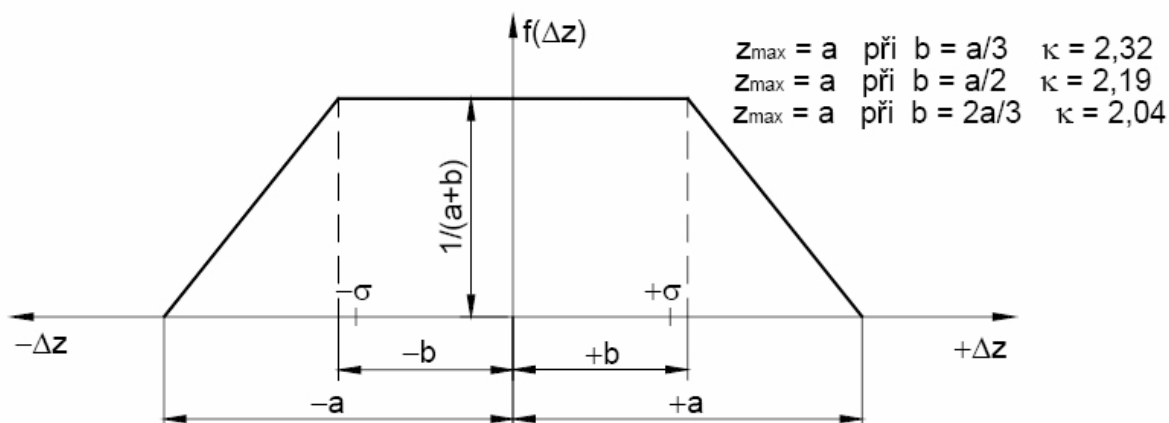
Diracovo rozdělení lze použít například pro ohodnocení pravděpodobnosti vlivu hystereze měřicího přístroje, která se prakticky vždy uplatní jako zdroj nejistoty v plné výši, tj. směrodatná odchylka je přímo rovna krajní mezi.

Bimodální (trojúhelníkové) rozdělení lze použít pro hodnocení pravděpodobnosti chybného odečtu na noniu posuvného měřítka či mikrometru (pokud jsou rysky pevné a pohyblivé části proti sobě pravděpodobnost omylu nulová, zatímco čím blíže je ryska pohyblivé části ke středu mezi dvěma ryskami na pevné části, tím je pravděpodobnost omylu vyšší).



Obr. 3.6: Rovnoměrné (pravoúhlé) rozdělení

Ve většině případů lze uvažovat, že hodnota ovlivňující veličiny může ležet kdekoli mezi oběma mezními hodnotami, aniž by byla kterákoli hodnota upřednostňována. Tehdy volíme rovnoměrné rozdělení  $k = \sqrt{3}$



Obr. 3.7: Lichoběžníkové rozdělení

Pokud se v určité oblasti hodnot chová ovlivňující veličina podle rovnoměrného rozdělení, ale i mimo tuto oblast se též mohou vyskytovat hodnoty ovlivňující veličiny, ovšem s klesající pravděpodobností směrem k mezním hodnotám, může se zvolit některé z uvedených lichoběžníkových

rozdělení  $k=2,04$  až  $k=2,32$ . (Praktickým příkladem může být například teplota v laboratoři, při použití klimatizační jednotky dimenzované na běžné teploty venkovního prostředí, ale nepostačující pokrýt teplotní extrém). [6][14]

## 4 STATISTIKA PŘI ANALÝZE NEJISTOT

Nejistoty měření se řídí určitým rozložením pravděpodobnosti, mým úkolem bylo otestovat na souborech naměřených dat, zda-li odpovídají rozložení pravděpodobnosti.

### 4.1 Statistické testy hypotéz

V metrologii často vzniká otázka zda dvě zkušební metody jsou shodné, jestli se hodnoty výběrového souboru chovají podle normálního rozdělení, zda dva měřicí přístroje jsou shodné z hlediska přesnosti, zda dvě laboratoře jsou shodné z hlediska přesnosti, atd. Na tyto otázky nám pomáhá odpovědět testování statistických hypotéz.

Statistická hypotéza je tedy tvrzení o hodnotě parametru nějakého rozdělení (parametrická hypotéza), nebo o typu rozdělení (neparametrická hypotéza). Hypotézu, jejíž platnost budeme testovat značíme  $H_0$ , jedná se o tzv. nulovou hypotézu. Proti této hypotéze stavíme tzv. alternativní hypotézu  $H_1$  - tedy tvrzení o opaku nulové hypotézy.

Jestliže  $H_0$  je hypotéza, že parametr  $\Theta$  má hodnotu  $\Theta_0$ , pak píšeme  $H_0: \Theta = \Theta_0$ . Příklad  $H_1: \Theta \neq \Theta_0$  je dvoustranná alternativní hypotéza a  $H_1: \Theta > \Theta_0$  popř.  $H_1: \Theta < \Theta_0$  je jednostranná alternativní hypotéza.

Testování hypotézy pak probíhá na základě tzv. testovacího kritéria, což je funkce náhodného výběru se vztahem k nulové hypotéze a její rozdělení za předpokladu platnosti nulové hypotézy známe. Obor možných hodnot testovacího kritéria se rozdělí na dvě disjunktní podmnožiny, obor přijetí testovací hypotézy  $W$  a kritický obor  $V$ . Kritický obor  $V$  se vzhledem k alternativní hypotéze  $H_1$  stanoví tak, aby pravděpodobnost toho, že testovací kritérium nabude hodnotu z kritického oboru  $V$  byla  $\alpha$ . Číslo  $\alpha > 0$  je pak hladina významnosti testu a volíme ji blízkou nule, obvykle 0,05 nebo 0,01. Při vyhodnocení testování hypotéz postupujeme následovně: padne-li hodnota testovacího kritéria do množiny  $V$ , zamítáme testovací hypotézu  $H_0$  a zároveň nezamítáme testovací hypotézu  $H_1$  na hladině významnosti  $\alpha$ . Padne-li naopak hodnota testovacího kritéria do množiny  $W$ , pak nezamítáme testovací hypotézu  $H_0$  a zároveň zamítáme testovací hypotézu  $H_1$  na hladině významnosti  $\alpha$ .

Při testování hypotéz se můžeme dopustit i chyb. Pokud chybně zamítneme hypotézu  $H_0$  dopouštíme se tzv. **chyby prvního druhu**. Pravděpodobnost této chyby je hladina významnosti  $\alpha = P(H_0 \text{ zamítneme} | H_0 \text{ je správně})$ . Když naopak nezamítneme hypotézu  $H_0$  při platnosti hypotézy  $H_1$  dopouštíme se tzv. **chyby druhého druhu**. Pravděpodobnost výskytu této chyby je  $\beta = P(H_0 \text{ nezamítneme} | H_0 \text{ není správně})$ . Hodnota  $(1 - \beta)$  se pak nazývá **síla testu**.

Ideální by samozřejmě bylo, aby testovací kritérium podle kterého zamítáme nebo nezamítáme  $H_0$  bylo takové, aby pravděpodobnost obou chyb byla co nejmenší. Pokud ale snížíme  $\alpha$ , zvýší se  $\beta$  a síla testu bude klesat.

Postup při testování:

- 1) Stanovíme nulovou hypotézu  $H_0$ , o které předpokládáme, že platí.
- 2) Stanovíme alternativní hypotézu  $H_1$ , o které předpokládáme, že neplatí, pokud se neprokáže opak.
- 3) Zvolíme vhodnou testovací statistiku a její rozdělení.
- 4) Určíme hladinu významnosti  $\alpha$ .
- 5) Najdeme (v tabulkách) nebo vypočítáme kritické hodnoty rozdělení testovací statistiky pro zvolenou hodnotu  $\alpha$ , která závisí na alternativní hypotéze  $H_1$  a vymezuje kritický obor hodnot.
- 6) Rozhodneme, zda zamítneme či nezamítneme  $H_0$  na úrovni významnosti  $\alpha$  podle toho, zda se

vypočítaná hodnota nachází nebo nenachází v kritickém oboru.[4][5][12][13]

## 4.2 P-hodnota

Při klasickém postupu testování hypotéz je hladina významnosti stanovena předem a závěry jsou formulovány v pojmech zamítnutí nebo nezamítnutí nulové hypotézy. Tento přístup nedovoluje uživatelům, kteří mají k dispozici pouze závěry o testované hypotéze, učinit své vlastní ohodnocení (tj. vybrat si svoji vlastní hladinu významnosti). Z tohoto důvodu se ve většině statistického software udává tzv. P hodnota (P-value) hypotézy. Vypočteme hodnotu testovací statistiky a k ní nejmenší obor zamítnutí, při kterém bychom mohli na základě této hodnoty zamítnout nulovou hypotézu proti dané alternativě. Hladina významnosti odpovídající tomuto kritickému oboru je P-hodnota.

Nechť  $T$  je testovaná statistika,  $t_c$  je pozorovaná hodnota testové statistiky, pak P-hodnota testu hypotézy se rovná:

- $2 \cdot \min \{P(T \leq t_c), P(T \geq t_c)\}$  pro dvoustranný test,
- $P(T \leq t_c)$  pro levostranný test,
- $P(T \geq t_c)$  pro pravostranný test.

kde pravděpodobnosti jsou počítány za podmínky, že nulová hypotéza platí.

P-hodnota testu hypotézy je rovna nejmenší hladině významnosti, na které nulová hypotéza může být zamítnuta, to je nejmenší hladině významnosti, při které výběrová data vedou k zamítnutí nulové hypotézy.

Pro ověření platnosti testované hypotézy pak platí:

Jestliže P-hodnota je menší nebo rovna zadané hladině významnosti, pak zamítáme nulovou hypotézu, v opačném případě nulovou hypotézu nezamítáme.

Postup při testování:

- 1) Formulujeme nulovou a alternativní hypotézu.
- 2) Zvolíme hladinu významnosti  $\alpha$ .
- 3) Vypočítáme hodnotu testované statistiky.
- 4) Určíme P-hodnotu.
- 5) Pokud  $P \leq \alpha$ , pak zamítneme  $H_0$ ; v opačném případě  $H_0$  nezamítáme. [13]

## 4.3 Software pro testování rozdělení pravděpodobnosti

Pro identifikaci rozdělení pravděpodobnosti naměřeného výběrového souboru jsem použil z důvodu rozdílného počtu testovaných rozdělení čtyři programy: Minitab, Qc Expert, Statgraphics a Statistica.

### 4.3.1 Minitab

Minitab byl vyvinut na Pensylvánské státní universitě (Pennsylvania State University) týmem vědců v roce 1972. Kromě angličtiny je k dispozici dalších pět světových jazyků. Program nabízí tabulkové prostředí, intuitivní ovládání, obsáhlou nápovědu a rozsáhlé množství tutoriálů, dostupných na internetu.

### 4.3.2 Qc Expert

Qc Expert je statistický systém pro analýzu dat od české firmy trilobyte statistical software. Program

je dostupný v české nebo anglické verzi. Program nabízí tabulkové prostředí a rozsáhlou nápovědu, která je také dostupná v češtině.

### 4.3.3 Statgraphics

Program vytvořil v roce 1980 Dr. Neil Polhemus. Současná verze Statgraphics *Centurion XVI* nabízí tabulkové prostředí a obsáhlou nápovědu, program je dostupný pouze v angličtině.

### 4.3.4 Statistica

Program vytvořený v roce 1991 jako pokračování statistických systémů od americké firmy Statsoft. Práce s daty je řešena opět pomocí tabulkového prostředí. Statistica je navíc plně přeložena do češtiny. K dispozici je obsáhlá nápověda a tutoriály na internetu.

## 4.4 Statistické testy

Pomocí testů jsme schopni posoudit, zda má náhodná veličina předem dané rozdělení pravděpodobnosti.

### 4.4.1 Chí kvadrát test

Chí kvadrát test se používá pro zjištění, zda náhodný výběr pochází ze základního souboru s vybraným rozdělením. Pro testovanou hypotézu:

$H_0$  náhodný výběr pochází ze základního souboru s normálním rozdělením.

$H_1$  náhodný výběr nepochází ze základního souboru s normálním rozdělením.

je postup následující:

Naměřené údaje o rozsahu  $n$  rozdělíme do intervalů s příslušnou četností. Necht' je počet intervalů  $r$ , absolutní četnost třídy  $n_i$ . Necht' hranice intervalů jsou:

$$(-\infty, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{r-1}, \infty) \quad (4.1)$$

kde  $r \geq 4$  a

$$\bar{t}_1 = t_1 - \frac{t_2 - t_1}{2}, \bar{t}_2 = \frac{t_1 + t_2}{2}, \dots, \bar{t}_{r-1} = \frac{t_{r-2} + t_{r-1}}{2}, \bar{t}_r = t_{r-1} + \frac{t_{r-1} - t_{r-2}}{2} \quad (4.2)$$

jsou (až na první a poslední) středy tříd. vypočítáme:

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i \bar{t}_i \quad a \quad b^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i^2 \bar{t}_i - a^2 \quad (4.3)$$

Pro  $t_0 = -\infty$  a  $t_r = \infty$  určíme

$$p_i = \Phi\left(\frac{t_i - a}{b}\right) - \Phi\left(\frac{t_{i-1} - a}{b}\right) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.4)$$

kde  $\Phi(x)$  je hodnota distribuční funkce rozdělení  $N(0,1)$  v bodě  $x$ .

Testovací statistika  $X^2$  má při platnosti  $H_0$  chí-kvadrát rozdělení, která je za předpokladu, že  $\mu, \sigma^2$  jsou neznáme parametry, definována vztahem:

$$X^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \quad (4.5)$$

$H_0$  zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$  pokud:

$$X^2 > X^2(r-3, \alpha) \quad (4.6)$$

nebo

$$X^2 > X^2_{1-\alpha}(r-3) \quad (4.7)$$

kde:

$X^2 > X^2(r-3, \alpha)$  je kritická hodnota chí-kvadrát rozdělení s  $r-3$  stupni volnosti.

$X^2 > X^2_{1-\alpha}(r-3)$  je kvantil chí-kvadrát rozdělení s  $r-3$  stupni volnosti.

Počet tříd je potřeba volit tak, aby platilo  $np_i \geq 5$ . [2]

#### 4.4.2 Kolmogorov-Smirnov test

Tímto testem se ověřuje hypotéza, zda pozorovaná náhodná veličina  $X$  spojitého typu má rozdělení pravděpodobnosti s distribuční funkcí  $F(x)$ .

$H_0$   $X$  má rozdělení  $F(x)$

$H_1$   $X$  nemá rozdělení  $F(x)$

Tato hypotéza se testuje na základě faktu, zda je rozdíl mezi teoretickou a empirickou distribuční funkcí statisticky významný. Otázkou zůstává, kdy budeme rozdíl považovat za významný. Testovací statistika pro testování hypotézy  $H_0$  je podle Kolmogorova dána vztahem:

$$D = \max \left\{ \max \left[ \left| F(x_{[i]}) - \frac{i}{n} \right|, \left| F(x_{[i]}) - \frac{i-1}{n} \right| \right] \right\} \quad (4.8)$$

kde  $F(x_{[i]})$  je hodnota teoretické distribuční funkce v bodě  $x_{[i]}$

Supremum rozdílu mezi teoretickou a empirickou distribuční funkcí se bude tedy hledat jen v bodech skoku.

Hypotézu  $H_0$  zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , pokud:

$$D > D(n, \alpha) \quad (4.9)$$

kde:  $D > D(n, a)$  je kritická hodnota Kłomogorov-Smorinovov statistiky,[2] pro kterou platí:

$$P(D > D(n, a) | X \text{ má rozdělení } F(x)) = a \quad (4.10)$$

#### 4.4.3 Anderson-Darling test

Anderson-Darling test je určen pro identifikaci rozdělení z výběrového souboru dat. Jedná se o modifikaci Kolmogorov-Smirnov testu. Hlavní rozdíl je v tom, že Anderson-Darling test má specifické kritické hodnoty pro každé rozdělení.

$H_0$  náhodný výběr pochází ze základního souboru zvoleného rozdělení.

$H_1$  náhodný výběr nepochází ze základního souboru zvoleného rozlišení.

Anderson-Darling test je pak definován jako:

$$A^2 = -N - S \quad (4.11)$$

kde:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{2i-1}{N} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))] \quad (4.12)$$

$F$  je distribuční funkce zvoleného rozdělení.

$Y_i$  jsou vzestupně seřazená data. ( $Y_1 < \dots < Y_n$ )

Pro test normality je pak postup následující:

- 1) Data z náhodného výběru rozdělíme tak, aby platilo  $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$
- 2) Vypočteme průměr  $\bar{X}$  a směrodatnou odchylku  $s$  z náhodného výběru.
- 3) Transformuje  $X_i$  na  $Y_i$  s normovaným normálním rozdělením  $N(0;1)$  za pomoci vztahu:

$$Y_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s}$$

- 4) S normální distribuční funkcí  $\Phi$  vypočítáme  $A^2$  jako:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) (\ln \Phi(Y_i) + \ln(1 - \Phi(Y_{n+1-i}))) \quad (4.13)$$

- 5) Vypočteme  $A^{*2}$  jako úpravu rozsahu dat:

$$A^{*2} = A^2 \left( 1 + \frac{4}{n} - \frac{25}{n^2} \right) \quad (4.14)$$

- 6) Pokud  $A^{*2} > 0,751$  potom hypotézu o normálním rozdělení zamítáme na hladině významnosti  $\alpha = 5\%$ . [7] [15]

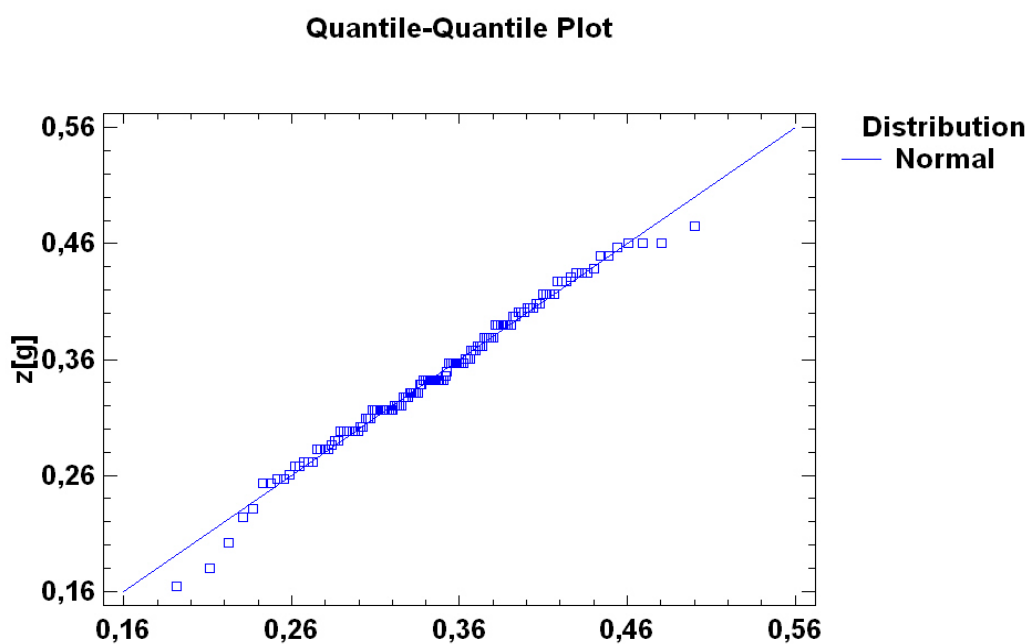
#### 4.5 Quantile-Quantile plot (Q-Q plot)

Nám umožňuje graficky posoudit, zda data pocházejí z nějakého známého rozložení. Při konstrukci Q-Q plot postupujeme tak, že na svislou osu vynášíme uspořádané hodnoty  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  a na vodorovnou osu kvantily  $K_{\alpha_j}(X)$ , kde:

$$\alpha_j = \frac{j - R_{adj}}{n + n_{adj}} \quad (4.15)$$

Příčemž:  $r_{adj}$  a  $n_{adj}$  jsou korigující faktory  $\leq 0,5$ . Implicitně se klade  $r_{adj} = 0,375$  a  $n_{adj} = 0,25$ . Pokud vybrané rozložení závisí na nějakých parametrech, pak se tyto parametry odhadují z dat nebo se volí na základě teoretického modelu. Body  $(K_{\alpha_j}(X), x_{(j)})$  se metodou nejmenších čtverců proloží přímkou. Čím méně se body odchylují od této přímky, tím lepší je soulad mezi empirickým a teoretickým rozložením.

Pokud jsou některé hodnoty  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  stejné, pak za  $j$  bereme průměrné pořadí odpovídající takové skupině.[12]



Obr. 4.1: Příklad Q-Q plotu pro ověření, zda data pochází z normálního rozdělení

## 4.6 Histogram

Za předpokladu, že náhodná proměnná  $X$  (měřená veličina) má rozdělení spojitého typu s distribuční funkcí  $F(x)$ . Necht'  $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  je náhodný výběr z této náhodné proměnné. Rozdělíme interval možných hodnot proměnné  $X$  na intervaly  $(t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{r-1}, t_r)$ , které nazveme intervaly třídy popř. třídy. Počty pozorování v jednotlivých třídách označíme  $n_1, n_2, \dots, n_r$  a nazveme třídni četnosti. Pro třídni četnosti platí:  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ . Čísla:

$$\hat{P}_i = \frac{n_i}{n} \quad i=1, 2, \dots, r \quad (4.16)$$

jsou relativní četnosti tříd a jejich součet je roven jedné. Relativní četnosti tříd  $\hat{P}_i$  jsou nevychýlené odhady pravděpodobnosti

$$\hat{p}_i = P(t_{i-1} < X < t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x) dx \quad (4.17)$$

kde  $f(x)$  je funkce hustoty pravděpodobnosti proměnné  $X$ .

Počet tříd  $r$  volíme přibližně  $1 + 3,3 \log n$  (pro statický soubor symetrického charakteru) anebo  $\sqrt{n}$  až  $2\sqrt{n}$  (pro statický soubor symetrického charakteru). Pro délku třídy platí:

$$h \approx \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{r} \quad (4.18)$$

kde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  je uspořádaný statistický soubor, pro který platí:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ .

Přibližnou představu o průběhu hustoty získáme z tzv. histogramu. Histogram je graf, ve kterém jsou na jedné ose vyznačeny třídni intervaly a nad každým intervalem sestrojený obdélník o ploše úměrné relativní četnosti  $\hat{P}_i$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ , tento histogram se nazývá histogram relativních četností (obr. 8.2). Jiná alternativa konstrukce histogramu je nanášení četností  $n_1, n_2, \dots, n_r$ , takový histogram se nazývá histogram četností (obr. 8.1).

Příloha č.1 ukazuje histogramy náhodného výběru z normálního výběru se střední hodnotou  $\mu=10$  a se směrodatnou odchylkou  $\sigma=1$ . Z histogramů je patrné, že čím větší je rozsah výběru  $n$ , tím lépe odpovídá výběrové rozdělení znázorněné histogramem základnímu souboru. [3][4][5][12]

## 4.7 Identifikace odlehlých pozorování

Při analýze naměřených dat z náhodného výběru se může stát, že některé naměřené údaje se výrazně odlišují od ostatních dat. Tyto údaje zkreslují  $\bar{X}$  či  $S$  a mohou vést k chybným závěrům z analýzy dat. Příčiny těchto atypických hodnot mohou být hrubé chyby, může se však jednat i o korektní pozorování. K zjištění těchto hodnot můžeme použít grafické metody jako: histogram nebo krabicový graf, pro ověření, zda se jedná o odlehlé pozorování použijeme Grubbsův test.

### 4.7.1 Grubbsův test

Grubbsův test slouží pro identifikaci odlehlých pozorování, pro naměřené údaje  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , které jsou realizací náhodného výběru  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Roztřídíme data tak, aby platilo  $x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq \dots \leq x_{[n]}$ , jako realizaci uspořádaného náhodného výběru  $X_{[1]} \leq X_{[2]} \leq \dots \leq X_{[n]}$ . Pro zjištění zda největší nebo nejmenší hodnota je odlehlou hodnotou použijeme Grubbsův test pro jedno pozorování.

Testujeme hypotézu:

$$H_0 : (X_{[1]}, X_{[2]}, \dots, X_{[n]})^T \text{ je náhodný výběr z } N(\mu, \sigma^2)$$

$$H_1^1 : X_{[n]} \text{ nepochází z } N(\mu, \sigma^2), \text{ ale je nepřiměřeně velká}$$

Pro testovací statistiku platí:

$$G_n = \frac{(x_{[n]} - \bar{x})}{s} \quad (4.19)$$

kde 
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}$$

Na testování významnosti nejmenšího pozorování tj alternativní hypotézu:

$H_1^2 : X_{[1]}$  nepochází z  $N(\mu, \sigma^2)$ , ale je nepřiměřeně malá  
se použije statistika:

$$G_1 = \frac{(\bar{x} - x_{[1]})}{s} \quad (4.20)$$

Hypotézu  $H_0$  zamítneme proti alternativní hypotéze  $H_1^1$  resp.  $H_1^2$  pokud:

$$G_n > G(1, n, \alpha) \text{ nebo } G_1 > G(1, n, \alpha) \quad (4.21)$$

kde

$G(1, n, \alpha)$  je kritická hodnota Grubbsovy statistiky pro jednu hodnotu. [3]

## 5 ANALÝZA NAMĚŘENÝCH DAT

Pro analýzu naměřených dat bylo zapotřebí zvolit vhodný rozsah počtu měření, jak naznačuje příloha 1, pro každé měření byl zvolen rozsah měření na 100 nebo více.

### 5.1 Naměřená data

- Měření šachové figurky posuvným měřítkem - šachová figurka vyrobená na CNC soustruhu z duralu byla měřena posuvným měřítkem s přesností 0,02 mm.
- Měření šachové figurky mikrometrem - šachová figurka byla měřena mikrometrem o přesnosti 0,01 mm.
- Měření dvířek obývací stěny metrem o přesnosti 1 mm.
- Měření rezistorů o odporu 470  $\Omega$  multimetrem s přesností 1  $\Omega$ .
- Měření rezistorů o odporu 8.2 k $\Omega$  multimetrem s přesností 1  $\Omega$ .
- Měření rezistorů o odporu 47 k $\Omega$  multimetrem s přesností 0,1k  $\Omega$ .
- Měření rezistorů o odporu 680 k $\Omega$  multimetrem s přesností 0,1k  $\Omega$ .
- Kalibrace vah 200g závažím.
- Kalibrace vah 600g závažím.
- Měření zrychlení akcelerometrem.
- Měření vibrací analyzátozem viditech.

### 5.2 Zhodnocení

Výsledky hodnocení ukazuje tabulka 5. ve sloupci předpokládané rozdělení je rozdělení, které se předpokládá při výpočtu dílčích nejistot typu B, sloupec P- hodnoty pak ukazuje P hodnoty jednotlivých testů. Výsledné rozhodnutí o zamítnutí, nebo nezamítnutí jednotlivých hypotéz pak závisí nejen na P-hodnotách jednotlivých testů, ale i rozložení histogramu a pozic jednotlivých bodů u Q-Q plotu. Výsledky pro jednotlivé měření lze nalézt v přílohách 2 až 12 v pořadí: výsledky testů, histogram a Q-Q plot.

#### 5.2.1 Figurka posuvné měřítko

Pro hladinu významnosti  $\alpha=5$  výsledky jednotlivých testů jasně naznačují, že se nejedná ani o jedno z testovaných rozdělení pravděpodobnosti. Z histogramu (obr. 8.8) lze pozorovat tři téměř stejné třídy malých odchylek, a rychle klesající „větší“ odchylky. Q-Q plot potvrzuje výsledky testů, data náhodného výběru nepochází z testovaných rozdělení.

### 5.2.2 Figurka mikrometr

Z testu je opět vidět, že data náhodného výběru nepochází z testovaných rozdělení pravděpodobnosti. Z histogramu (obr.8.10) je vidět velký výskyt hodnot nalevo od průměru, naopak malý výskyt hodnot napravo. Q-Q plot poměrně jasně potvrzuje závěr, že se nejedná o žádné testované rozdělení.

### 5.2.3 Dvířka obývací stěny

Z histogramu (obr. 8.12) je patrné, že většina hodnot leží v jedné třídě a sousedící třídy značí hranice rozměru. P hodnoty testu stejně jako Q-Q plot zamítají hypotézu o testovaných rozděleních.

### 5.2.4 Rezistory 470 $\Omega$

Téměř 80% hodnot spadá do jedné třídy jak je vidět z histogramu (obr.8.14), zbylé hodnoty se rozdělily na další 15% třídu a zbylé třídy o četnosti 1-2%. Takovéto uspořádání neodpovídá žádnému z testovaných rozdělení, jak je vidět na výsledcích testu stejně jako na Q-Q plot.

### 5.2.5 Rezistory 8.2 $k\Omega$

Histogram (obr. 8.16) ukazuje klesající pravděpodobnost výskytu hodnot od nejčetnější třídy, takové rozdělení je typické pro normální rozdělení. Q-Q plot ukazuje shodu mezi teoretickými kvantily a pozorovanými kvantily, menší odchýlení bodů od přímky pro normální rozdělení nasvědčuje předpokladu, že náhodný výběr pochází z normálního rozdělení. Hodnoty testu potvrzují hypotézu normálního rozdělení.

### 5.2.6 Rezistory 47 $k\Omega$

Histogram (obr. 8.18) je opět vidět klesající četnost jednotlivých tříd, což poukazuje na normální rozdělení. Q-Q plot ukazuje některé krajní hodnoty poměrně vzdálené od přímky pro normální rozdělení. P hodnota chí kvadrát testu 0,033 hovoří pro zamítnutí hovoří pro zamítnutí nulové hypotézy, přesto ale lze usuzovat z P hodnot zbylých dvou testů, stejně jako z Q-Q plotu, že se jedná o náhodný výběr z normálního rozlišení.

### 5.2.7 Rezistory 680 $k\Omega$

Velice věrohodné rozložení tříd pro normální rozdělení je vidět z histogramu (obr.8.20). Q-Q plot ukazuje většinu bodů ležet na přímce, nebo velmi blízko přímky. P hodnoty testů pak potvrzují hypotézu o normálním rozdělení.

### 5.2.8 Kalibrace vah 200 g závažím

Z histogramu (obr 8.22) lze usoudit rozložení dat se zápornou šikmostí. U Q-Q plotu je určitá shoda pouze s křivkou pro trojúhelníkové (Simpsonovo) rozdělení. P - hodnotu AD testu nezamítá hypotézu trojúhelníkového rozdělení a ačkoli zbylé dva testy tuto hypotézu zamítají, lze na základě histogramu a Q-Q plot usoudit, že náhodný výběr pochází ze základního rozdělení s trojúhelníkovým rozdělením pravděpodobnosti.

### 5.2.9 Kalibrace vah 600 g závažím

Při pohledu na histogram (obr 8.24) je vidět podobnost s normálním rozdělením, ovšem

problém je však v třídě umístěné mezi dvojicí nejčetnějších tříd. Body u Q-Q plotu leží poměrně daleko od přímky pro normální rozdělení. Ačkoliv AD test nezamítá nulovou hypotézu, lze na základě ostatních zmíněných kritérií usuzovat zamítnutí nulové hypotézy.

### 5.2.10 Měření zrychlení akcelerometrem

#### Osa x

Histogram (obr.8.26) nabízí srovnání s normálním a trojúhelníkovým rozdělením. Q-Q plot ukazuje většinu bodů na normální přímce a křivce pro trojúhelníkové rozdělení. Pro volbu normálního rozlišení kromě P - hodnoty chí kvadrát testu svědčí i fakt, že ostatní dvě osy (y,z) pochází ze základního souboru s normálním rozdělením, avšak hypotézu o trojúhelníkovém rozdělení nezamítáme.

#### Osa y

Z histogramu (obr 8.28) je vidět dobrá shoda s normálním rozlišením. Q-Q plot ukazuje většinu bodů na nebo poblíž normální přímky. Z P - hodnot je zřejmé, že se jedná o normální rozdělení.

#### Osa z

Stejně jako u předchozích os, i u osy z je vidět podobnost s normálním rozdělením. Z P - hodnot je pak zřejmé, že náhodný výběr pochází ze základního rozdělení s normálním rozdělením. Nezamítáme však ani hypotézu o trojúhelníkovém rozdělení.

### 5.2.11 Měření vibrací analyzátozem viditech

#### Měření č. 1

##### Vibrace A

Z histogramu (obr. 8.32) lze vidět pouze 3 různé třídy četností, z toho jedna třída odpovídá téměř 75% všech naměřených hodnot. Takové rozložení dat neodpovídá žádnému testovanému rozdělení.

##### Vibrace B

Stejně jako u vibrací A i zde je vidět přes 95% všech hodnot v jedné třídě. Náhodný výběr neodpovídá žádnému rozdělení.

## Měření č. 2

### Vibrace A

Histogram (obr. 8.36) ukazuje klesající výskyt velkých odchylek, Q-Q plot a P hodnoty testů naznačují, že se nejedná o žádné testované rozdělení.

### Vibrace B

Nulové P-hodnoty testů, body Q-Q plotu vzdálené od normální přímky, i uspořádání tříd histogramu, zamítá nulovou hypotézu.

## Měření č. 3

### Vibrace A

Histogram (obr. 8.40) popisuje velkou pravděpodobnost malých odchylek a velmi malou pravděpodobnost středních a velkých odchylek. P - hodnoty testu zamítají hypotézu o rozdělení pravděpodobnosti.

### Vibrace B

Většina dat spadá do jedné třídy tak, jak popisuje histogram (obr 8.42) velký počet tříd s nízkou četností, body od přímek na Q-Q grafu a výsledky testů zamítají nulovou hypotézu.

## Měření č.4

### Vibrace A

Histogram popisuje dvě třídy s nejvyšší četností a rychle klesající třídy s většími odchylkami. P hodnoty testů ani Q-Q plot nepotvrzují nulovou hypotézu.

### Vibrace B

Tři třídy s velkou četností a větší množství tříd s nízkou četností, body vzdálené od normální přímky Q-Q plotu, nulové P - hodnoty testů zamítají hypotézu, že náhodný výběr pochází ze zvoleného rozdělení.

Tabulka 5.1: zhodnocení jednotlivých měření

Druh měření	Předpokládané rozdělení	Zjištěné rozdělení	P-hodnota testů		
			CH-S	KS	AD
Měření figurky Posuvka	rovnoměrné	žádné	-	-	-
Měření figurky Mikrometr	rovnoměrné	žádné	-	-	-
Dvířka obývací stěny	rovnoměrné	žádné	-	-	-
Rezistor 470 $\Omega$	normální	žádné	-	-	-
Rezistor 8,2 k $\Omega$	normální	normální	0,18	0,44	$\geq 0,1$
Rezistor 47 k $\Omega$	normální	normální	0,03	0,2	$\geq 0,1$
Rezistor 680 k $\Omega$	normální	normální	0,45	0,46	$\geq 0,1$
Kalibrace vah 200g	trojúhelníkové	trojúhelníkové	0	0	$<0,1$
Kalibrace vah 600g	trojúhelníkové	žádné	-	-	-
Akcelerometr osa x	normální	normální	0,05	0,12	$\geq 0,1$
Akcelerometr osa y	normální	normální	0,67	0,8	$\geq 0,1$
Akcelerometr osa z	normální	normální	0,3	0,75	$\geq 0,1$
Vibrace A měření č.1	-	žádné	-	-	-
Vibrace B měření č.1	-	žádné	-	-	-
Vibrace A měření č.2	-	žádné	-	-	-
Vibrace B měření č.2	-	žádné	-	-	-
Vibrace A měření č.3	-	žádné	-	-	-
Vibrace B měření č.3	-	žádné	-	-	-
Vibrace A měření č.4	-	žádné	-	-	-
Vibrace B měření č.4	-	žádné	-	-	-



## 6 ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo seznámení se s chybami a nejistotami měření. Pro vyhodnocení nejistoty typu A je zapotřebí nejméně 10 měření. Dále je potřeba vypočítat aritmetický průměr a směrodatnou odchylku. Vyhodnocení nejistoty typu B je potom založeno na jiném přístupu, než popisné statistice náhodného výběru. Při vyhodnocení nejistoty typu B postupujeme jednou ze čtyř metod. Nejběžněji používaná metoda, kdy známe hranice vlivu zdroje pak používá rozdělení pravděpodobnosti pro určení nejistoty B. Volba rozdělení pravděpodobnosti se běžně pouze odhaduje, z důvodu časové náročnosti jak na rozsah měření tak na testovací metody.

Pro testované soubory celkem 14-ti měření bylo v plánu testovat tyto soubory na šest základních rozdělení, uvedené v kapitole 4.3 . Při zkoumání možností, dostupného statistického software se vyskytl první problém v tom, že dostupný software nepodporoval všechny rozdělení. Minitab nabízel pouze normální rozdělení pravděpodobnosti, Statistica normální a trojúhelníkové, QC expert a Statgraphics normální, trojúhelníkové a rovnoměrné. Z tohoto důvodu byly provedeny testy na normální, trojúhelníkové (Simpsonovo) a rovnoměrné rozdělení.

Pro testování byla vybrána trojice testů založená na testování hypotéz o rozdělení : Chí kvadrát, Kolmogorovův - Smirnovův test a Andersonův - Darlingův test, všechny tyto testy nám na základě P-hodnoty poskytují informaci jak moc silné jsou argumenty proti přijetí nulové hypotézy. Dvojice grafických metod: histogram a Q-Q plot nám pak v případě, kdy testy vycházejí nevýznamně napomocí určit, o jaké rozdělení se skutečně jedná. Další výhodou grafických metod je v tom, že nám pomohou odhalit výskyt extrémních pozorování.

Výskyt jedné nebo několika hodnot, které se velmi odlišují od zbytku naměřených hodnot může velmi negativně ovlivnit výsledky testů. Tyto hodnoty mohou být způsobeny chybami měření, zápisu, může se však jednat i o korektní hodnoty. Řešením je tyto odlehlé chyby opravit a pokud to není možné, je z dalších analýz odstranit.

Výsledky 14-ti testů potvrzují předpokládaný výskyt normálního rozdělení, naopak výskyt často používaného rovnoměrného rozdělení se nepotvrdil. U neprokázaných rozdělení nastává otázka, co bylo příčinou odchýlení dat od předpokládaného rozdělení? Příčin může být více, nevhodná metoda měření, chyby měření, ovlivnění testů výskytem extrémních hodnot, chybou měřidla nebo chybou obsluhy. Další možností je zkusit neidentifikované soubory dat otestovat na rozdělení, které se nepodařilo kvůli jejich absenci v použitém software zahrnout.



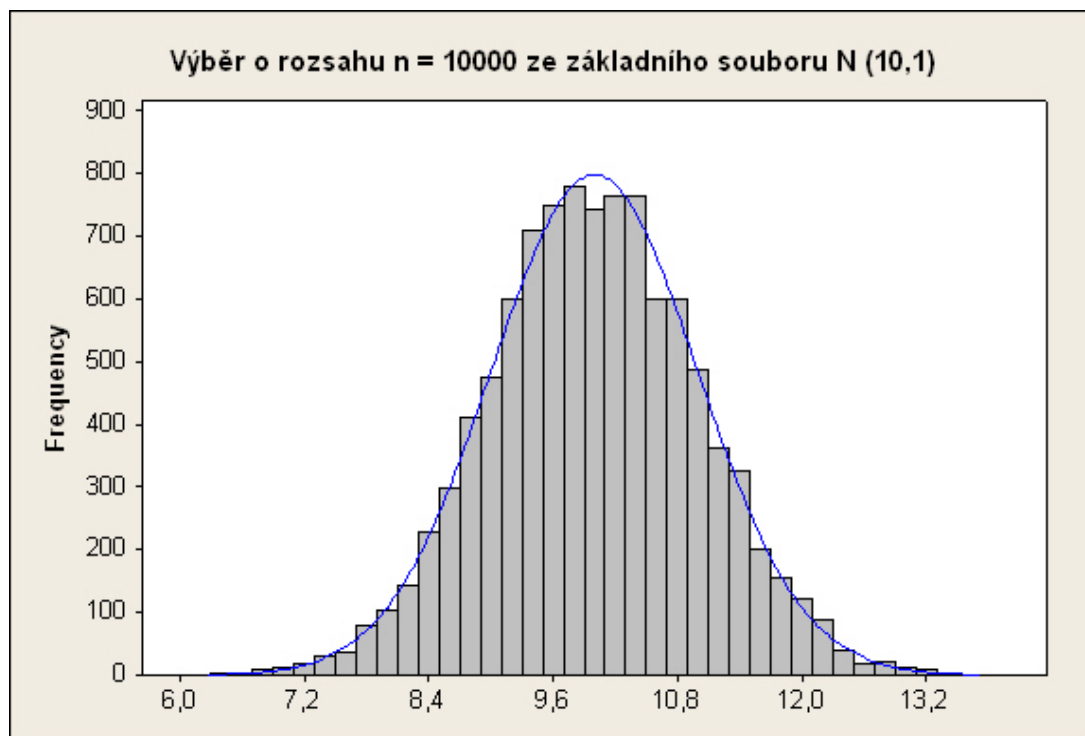
## 7 LITERATURA

1. PALENČÁŘ, Rudolf, et al. *Systém riadenia merania*. vyd. 1. Bratislava : STU, 2001. 208 s. ISBN 80-968449-7-0.
2. *Metrologie v kostce* [online]. Dánsko : EURONET, 2003 [cit. 2010-05-01]. Dostupné z WWW: <[www.cmi.cz/download.php?wdc=507](http://www.cmi.cz/download.php?wdc=507)>.
3. PALENČÁŘ, Rudolf, et al. *Štatistické metódy v metrologických a skúšobných laboratóriach*. Vyd. 1. Bratislava : STU, 2001. 366 s. ISBN 80-968449-3-8.
4. KARPÍŠEK, Zdeněk. *Matematika IV - Statistika a pravděpodobnost*. 2. dopl. vydání. Brno : CERM, 2003. 170 s. ISBN 80-214-2522-9.
5. JAROŠOVÁ, Eva; KRÁL, Jan. *Ověřování předpokladu normality* [online]. Praha : Národní informační středisko pro podporu jakosti, 2006 [cit. 2010-04-13]. Dostupné z WWW: <[isq.cz/npj/12%20-%20Testy\\_normality.pdf](http://isq.cz/npj/12%20-%20Testy_normality.pdf)>.
6. PERNÍKÁŘ, Jiří. Hodnocení způsobilosti kontrolních prostředků : chyby a nejistoty měření. In *Sborník přednášek z mezinárodní konference v oboru měření délek, geometrických veličin a struktury povrchu*. Brno : KVALITA A GPS, 2005. s. 22. ISBN 80-214-3033-8.
7. *Information Technology Laboratory* [online]. 2003 [cit. 2010-04-20]. Anderson-Darling Test. Dostupné z WWW: <<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35e.htm>>.
8. ZAHŘÁDKA, Petr. *Design Tech* [online]. 2006 [cit. 2010-04-25]. Nejistoty měření. Dostupné z WWW: <<http://www.designtech.cz/c/caq/nejistoty-mereni.htm>>.
9. PALENČÁŘ, Rudolf; VDOLEČEK, František; HALAJ, Martin. Nejistoty v měření I : vyjadřování nejistot. *Automa*. 2001, 7-8, s. 50-54. Dostupný také z WWW: <<http://www.odbornecasopisy.cz/download/au070150.pdf>>.
10. PALENČÁŘ, Rudolf; VDOLEČEK, František; HALAJ, Martin. Nejistoty v měření II : nejistoty přímých měření. *Automa*. 2001, 10, s. 52-56. Dostupný také z WWW: <<http://www.odbornecasopisy.cz/download/au100152.pdf>>.
11. PALENČÁŘ, Rudolf ; VDOLEČEK, František; HALAJ, Martin. Nejistoty v měření III : nejistoty nepřímých měření. *Automa*. 2001, 12, s. 28-33. Dostupný také z WWW: <<http://www.odbornecasopisy.cz/download/au120128.pdf>>.
12. BUDÍKOVÁ, Marie; LERCH, Tomáš; MIKOLÁŠ, Štěpán. *Základní statistické metody*. Vyd. 1. Brno : Masarykova Univerzita, 2005. 170 s. ISBN 80-210-3886-1.
13. NOVOVIČOVÁ, Jana. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha : ČVUT, 2006. 154 s.
14. *Vyjadřování nejistot : Vyjadřování nejistot měření při kalibraci*. [s.l.] : Palstat, 2002. 15 s.
15. KÁBA, Bohumil. Identifikace odlehlých pozorování ve statistických datech. In *Sborník konference - Agrární perspektivy VI.*. PEF ČZU Praha : Česká zemědělská univerzita v Praze. Provozně ekonomická fakulta, 1997. s. 439;441.

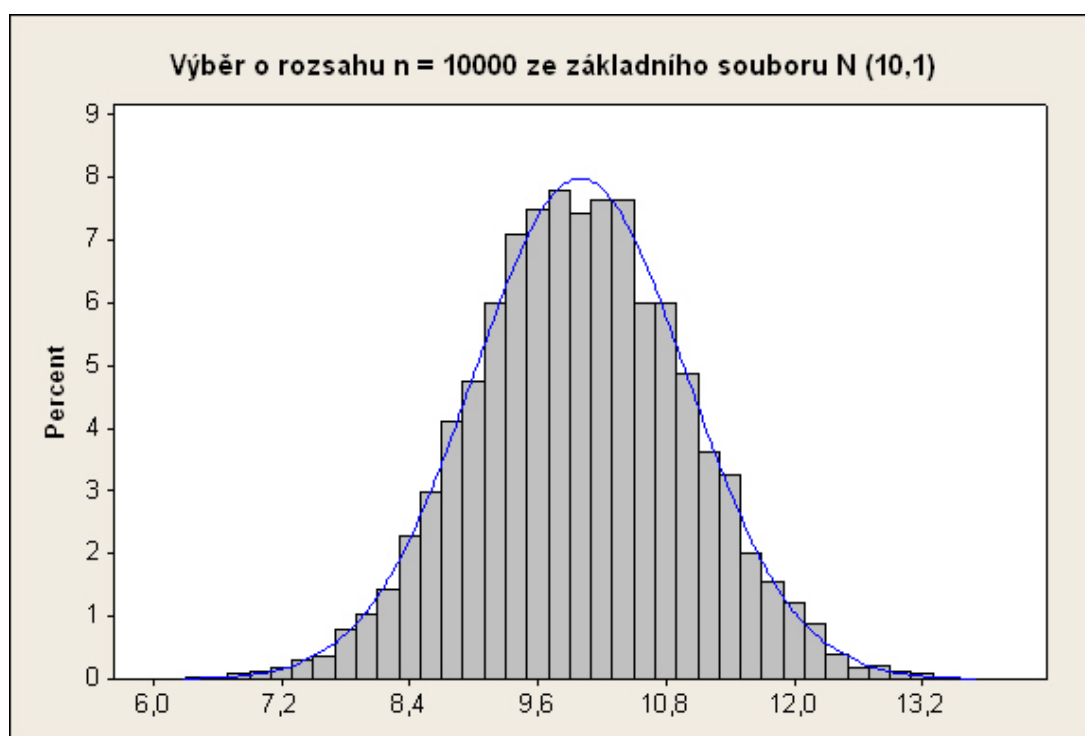
16. TŮMOVÁ Olga. *Nejistoty měření a EMC* [online prezentace]. Praha : ČSJ, [cit. 2010-05-01]. Dostupný z WWW: <[isq.cz/npj/Nejistoty%20mereni%20a%20EMC.ppt](http://isq.cz/npj/Nejistoty%20mereni%20a%20EMC.ppt)>.
17. *Statgraphics centurion XVI : user manual* [online]. [s.l.] : [s.n.], 2010 [cit. 2010-05-10]. Dostupné z WWW: <[http://www.statgraphics.com/user\\_guide.htm](http://www.statgraphics.com/user_guide.htm)>.
18. NĚMEČEK, Pavel. *Nejistoty měření*. 1. vyd. Praha : Česká společnost pro jakost, 2008. 96 s. ISBN 978-80-02-02089-9.

## 8 PŘÍLOHY

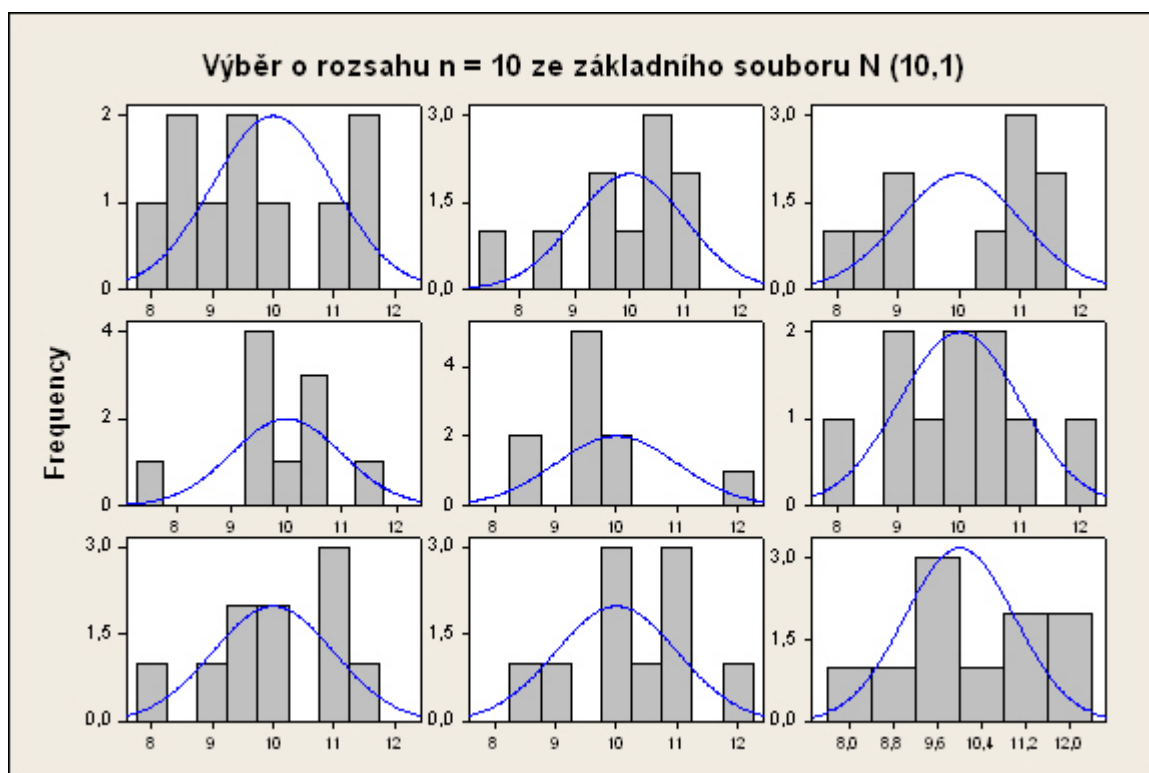
### Příloha 1: Histogramy



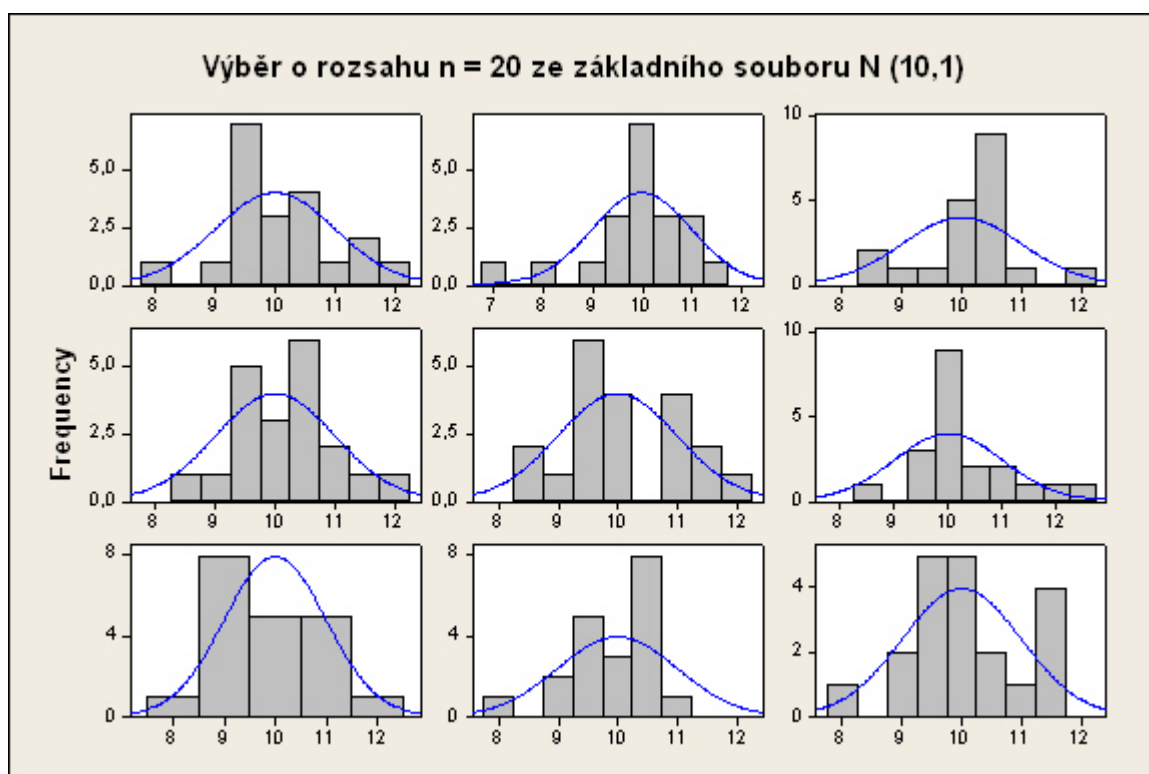
Obr. 8.1: Histogram četností



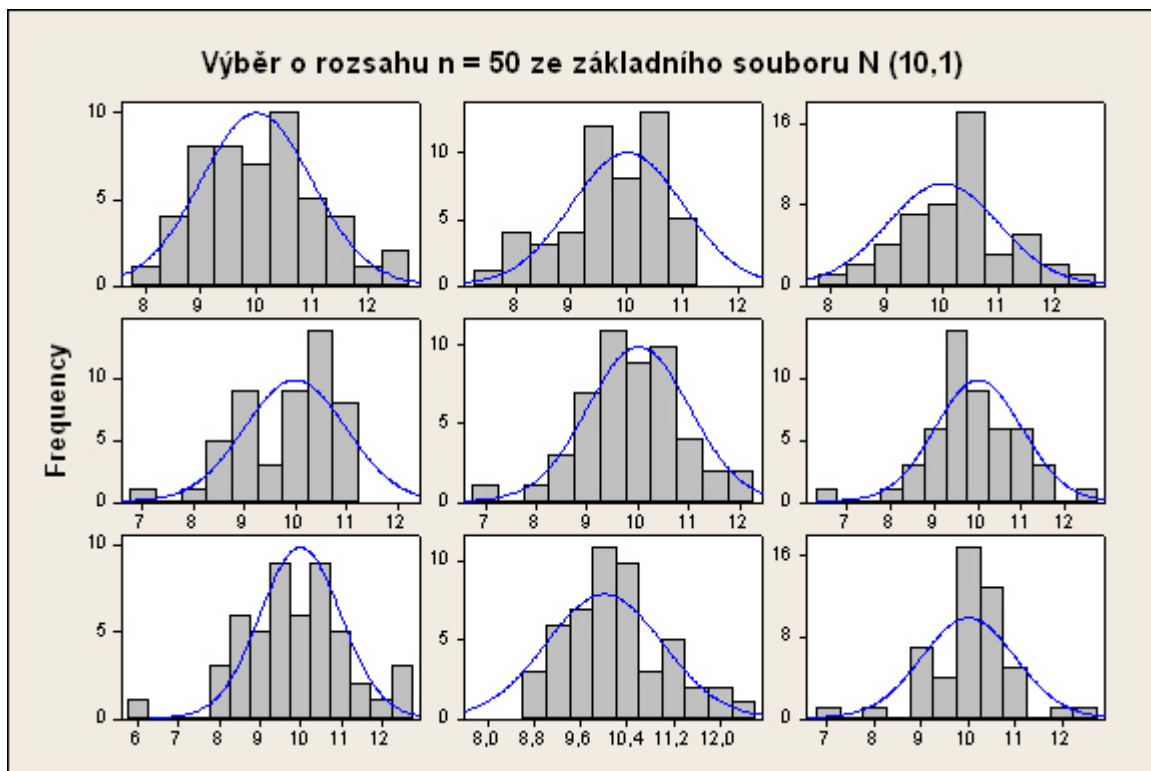
Obr. 8.2: Histogram relativních četností



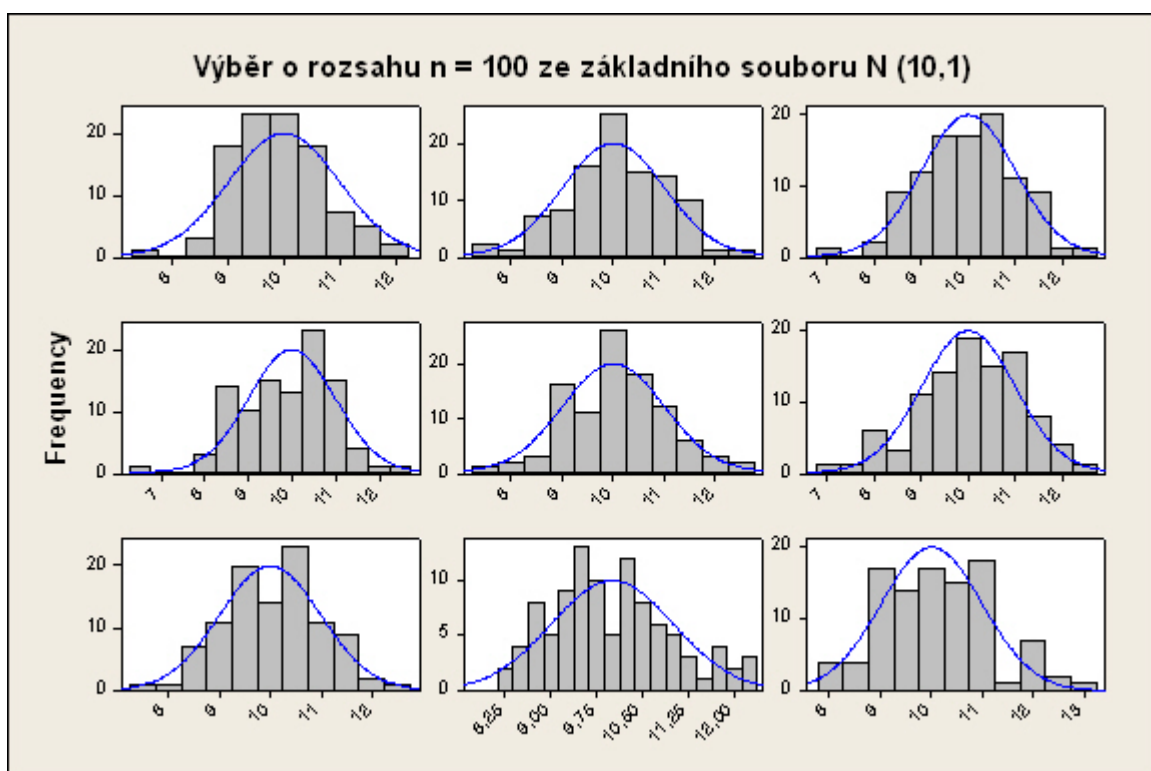
Obr. 8.3: Histogram



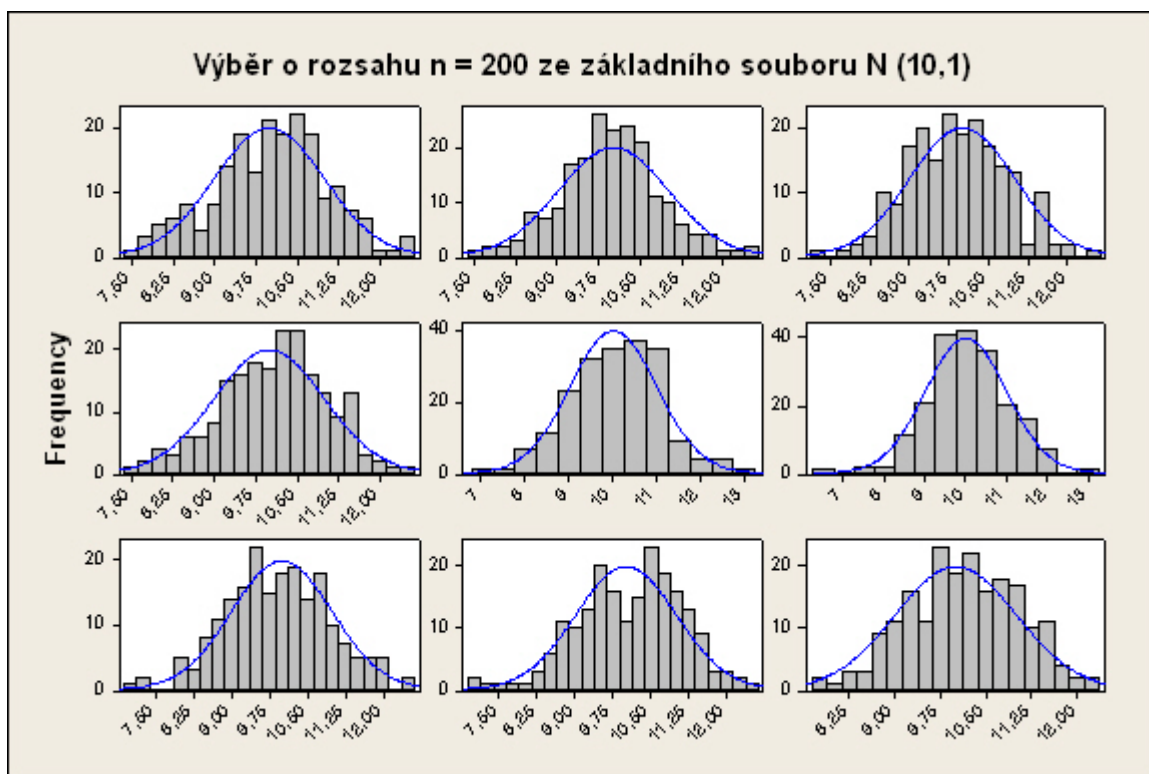
Obr. 8.4: Histogram



Obr. 8.5: Histogram



Obr. 8.6: Histogram



Obr. 8.7: Histogram

## Příloha 2: Měření průměru posuvkou

### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 25,0268	lower limit = 24,8971	lower limit = 24,9
standard deviation = 0,0310386	center point = 25,04	upper limit = 25,1
	upper limit = 25,1115	

### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	25,4559	50,2277	112,0
D.f.	4	5	7
P-Value	0,0000407317	1,24482E-9	0,0

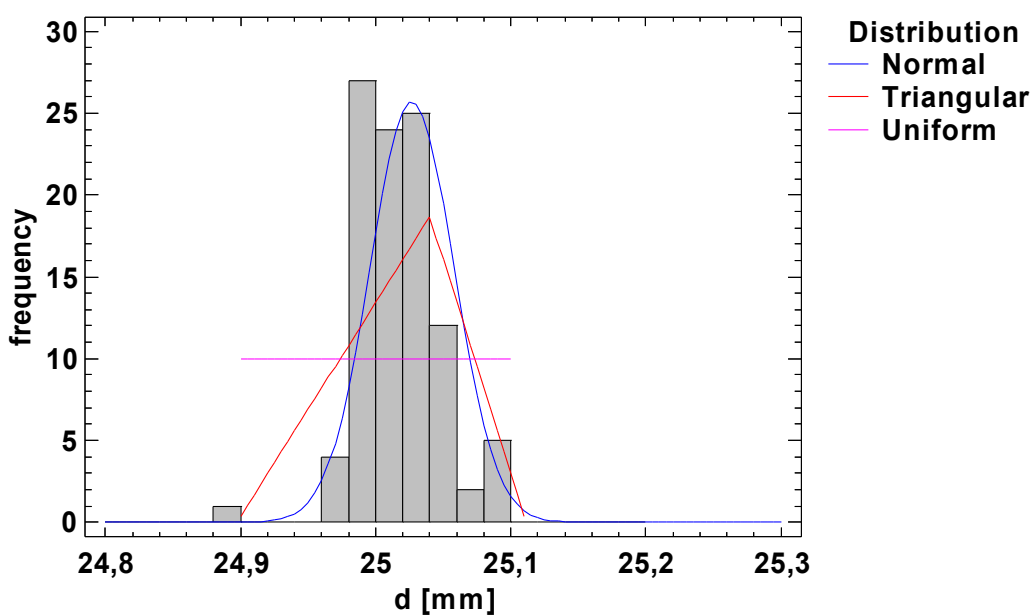
### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,146709	0,143494	0,13
DMINUS	0,143947	0,295508	0,45
DN	0,146709	0,295508	0,45
P-Value	0,0270094	5,20069E-8	0,0

### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

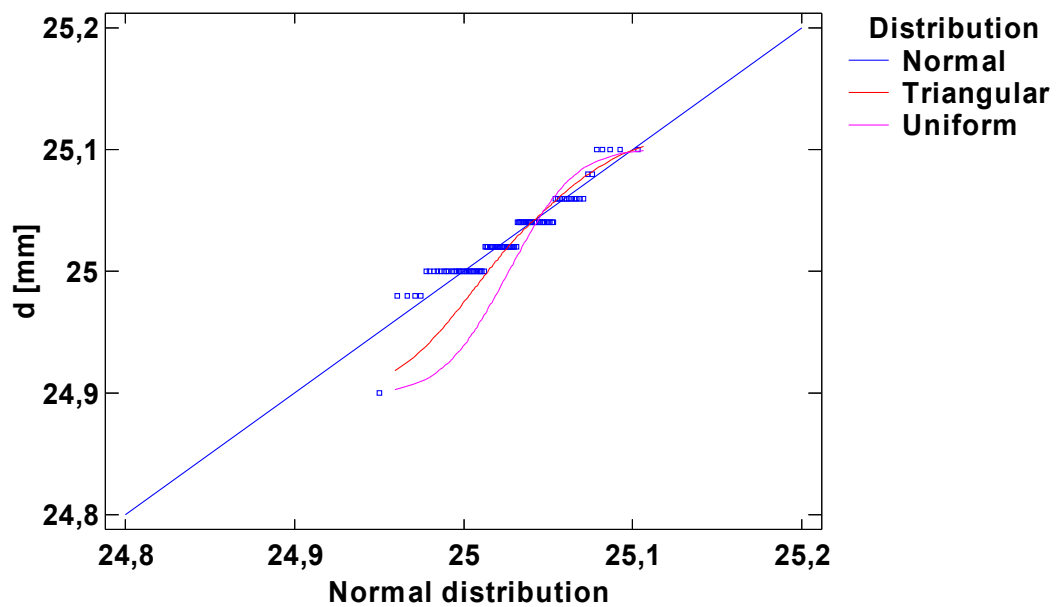
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	2,8278	7,6914	
Modified Form	2,8278	7,6914	
P-Value	<0.05	<0.01	

## Histogram



Obr. 8.8: Histogram měření průměru posuvkou

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.9: Q-Q plot měření průměru posuvkou

### Příloha 3: Měření průměru mikrometrem

#### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 24,964	lower limit = 24,9404	lower limit = 24,95
standard deviation = 0,011101	center point = 24,95	upper limit = 24,99
	upper limit = 24,9949	

#### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	246,42	257,423	304,867
D.f.	13	11	11
P-Value	0,0	0,0	0,0

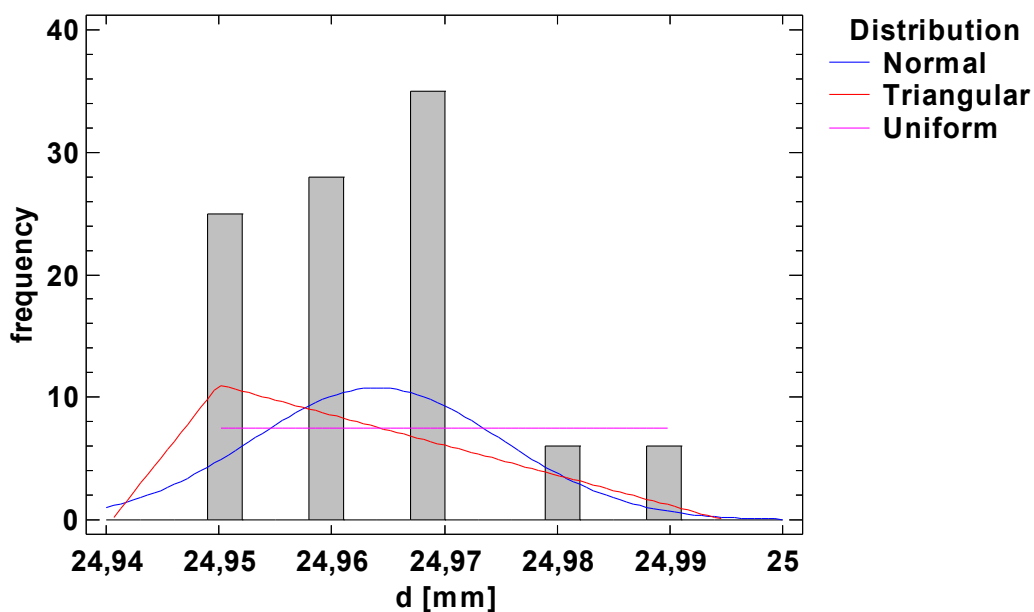
#### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,174428	0,133525	0,38
DMINUS	0,175572	0,252122	0,06
DN	0,175572	0,252122	0,38
P-Value	0,00420286	0,00000602265	0,0

#### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

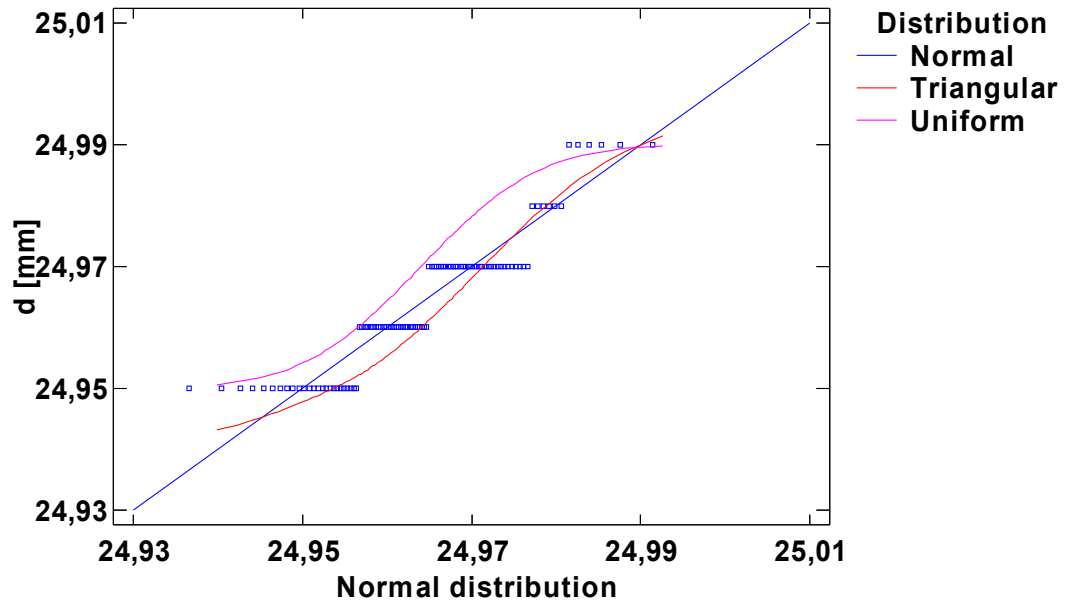
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	4,41236	6,37393	
Modified Form	4,41236	6,37393	
P-Value	<0.01	<0.01	

### Histogram



Obr. 8.10: Histogram měření průměru mikrometrem

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.11: Q-Q plot měření průměru mikrometrem

## Příloha 4: Měření dvířek obývací stěny

### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 49,615	lower limit = 49,4824	lower limit = 49,5
standard deviation = 0,0538891	center point = 49,6	upper limit = 49,7
	upper limit = 49,742	

### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	369,742	345,302	435,4
D.f.	9	7	7
P-Value	0,0	0,0	0,0

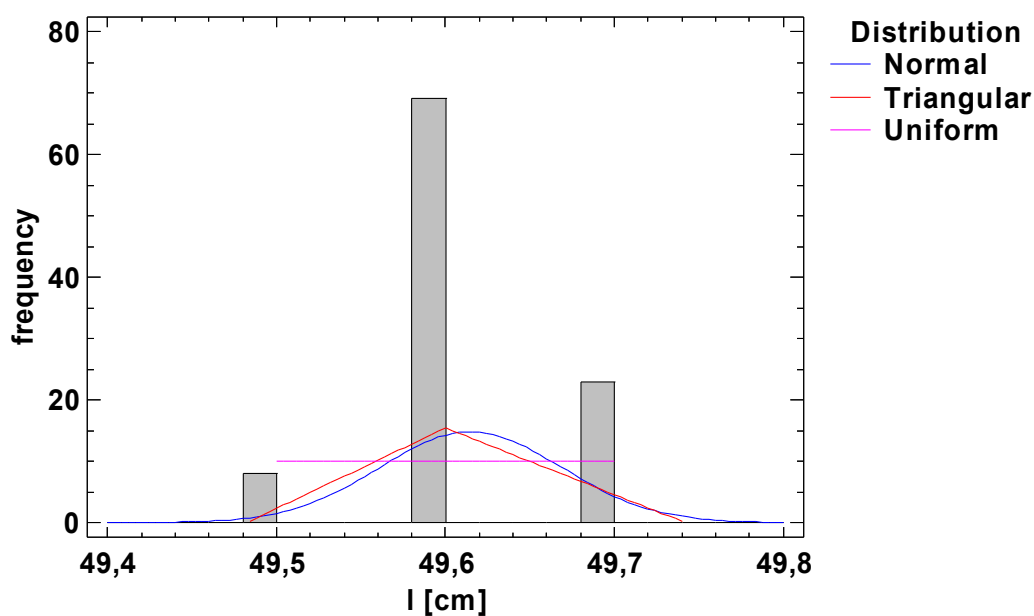
### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,37963	0,316919	0,27
DMINUS	0,31037	0,373081	0,42
DN	0,37963	0,373081	0,42
P-Value	0,0	0,0	0,0

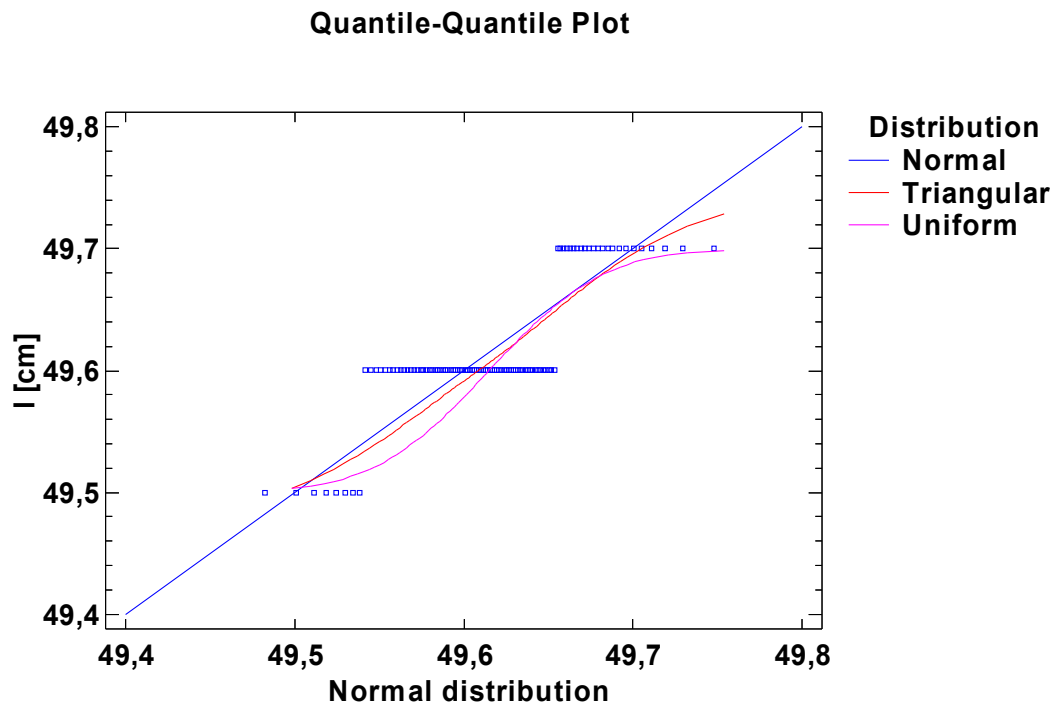
### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	14,8502	15,4865	
Modified Form	14,8502	15,4865	
P-Value	<0.01	<0.01	

### Histogram



Obr. 8.12: Histogram měření dvířek obývací stěny



Obr. 8.13: Q-Q plot měření dvířek obývací stěny

## Příloha 5: Měření rezistorů o odporu 470 $\Omega$ multimetrem

### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 470,0	lower limit = 467,0	lower limit = 467,0
standard deviation = 5,95607	center point = 466,953	upper limit = 501,0
	upper limit = 501,417	

### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	294,881	400,446	840,485
D.f.	7	9	11
P-Value	0,0	0,0	0,0

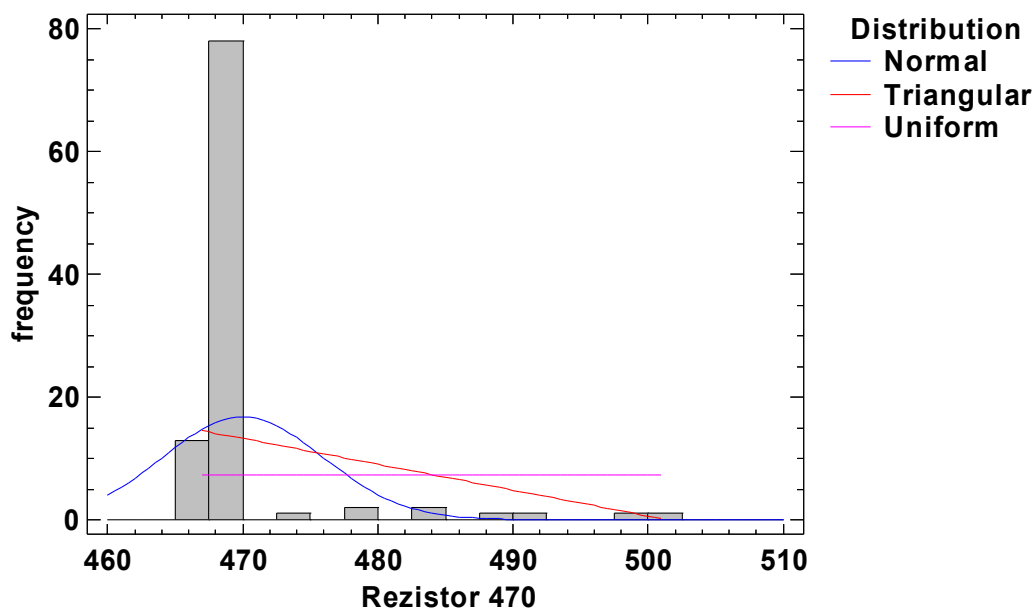
### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,41	0,742124	0,821765
DMINUS	0,307239	0,0150763	0,01
DN	0,41	0,742124	0,821765
P-Value	0,0	0,0	0,0

### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

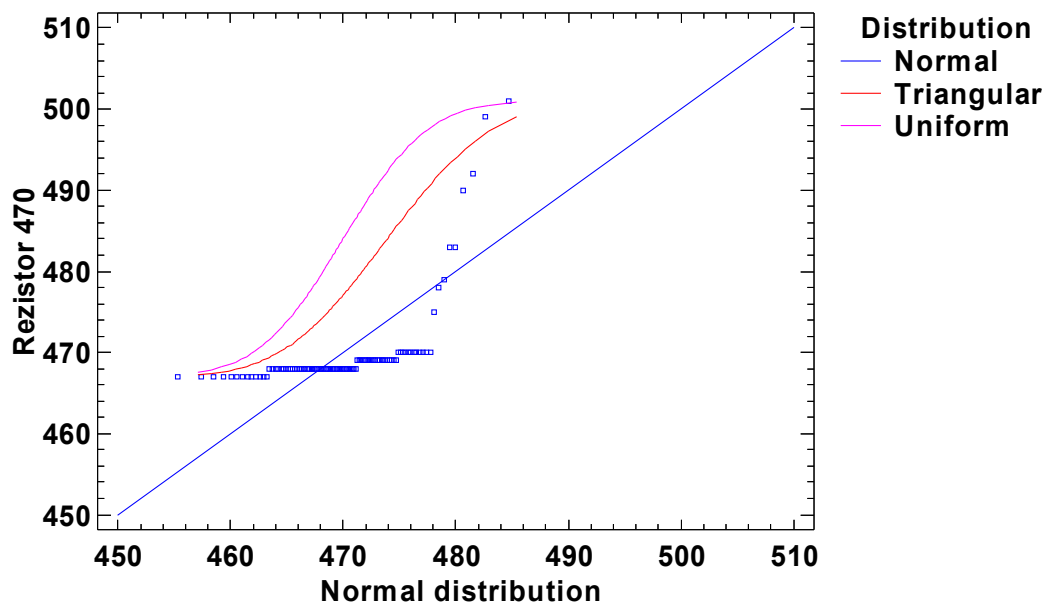
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	21,9061	113,045	
Modified Form	21,9061	113,045	
P-Value	<0.01	<0.01	

### Histogram



Obr. 8.14: Histogram měření rezistorů o odporu 470  $\Omega$  multimetrem

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.15: Q-Q plot měření rezistorů o odporu 470  $\Omega$  multimetrem

## Příloha 6: Měření rezistorů o odporu 8,2 kΩ multimetrem

### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 8,18232	lower limit = 8,0333	lower limit = 8,037
standard deviation = 0,0402148	center point = 8,188	upper limit = 8,284
	upper limit = 8,29355	

### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	12,5941	35,9092	108,659
D.f.	9	11	14
P-Value	0,181851	0,000175217	1,11022E-16

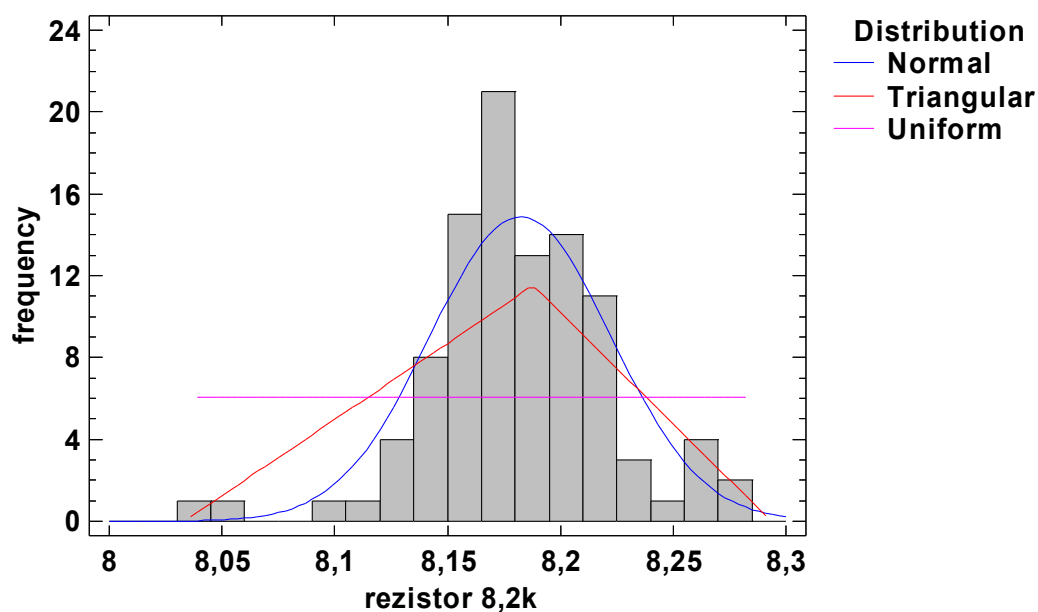
### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,0612668	0,0760966	0,144818
DMINUS	0,0863982	0,203963	0,342713
DN	0,0863982	0,203963	0,342713
P-Value	0,451974	0,000487113	0,0

### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

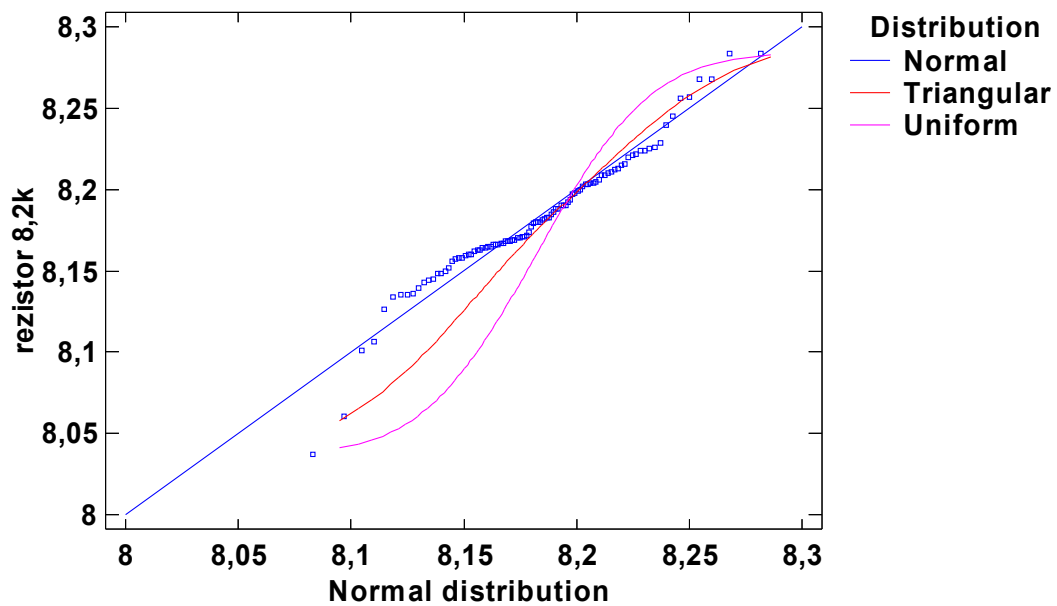
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	1,02689	5,45436	
Modified Form	1,02689	5,45436	
P-Value	>=0.10	<0.01	

### Histogram



Obr. 8.16: Histogram měření rezistorů o odporu 8,2 kΩ multimetrem

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.17: Q-Q plot měření rezistorů o odporu 8,2 k $\Omega$  multimetrem

## Příloha 7: Měření rezistorů o odporu 47 kΩ multimetrem

### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 46,7137	lower limit = 46,5581	lower limit = 46,57
standard deviation = 0,0694954	center point = 46,69	upper limit = 46,93
	upper limit = 46,9369	

### Chi-Square Test

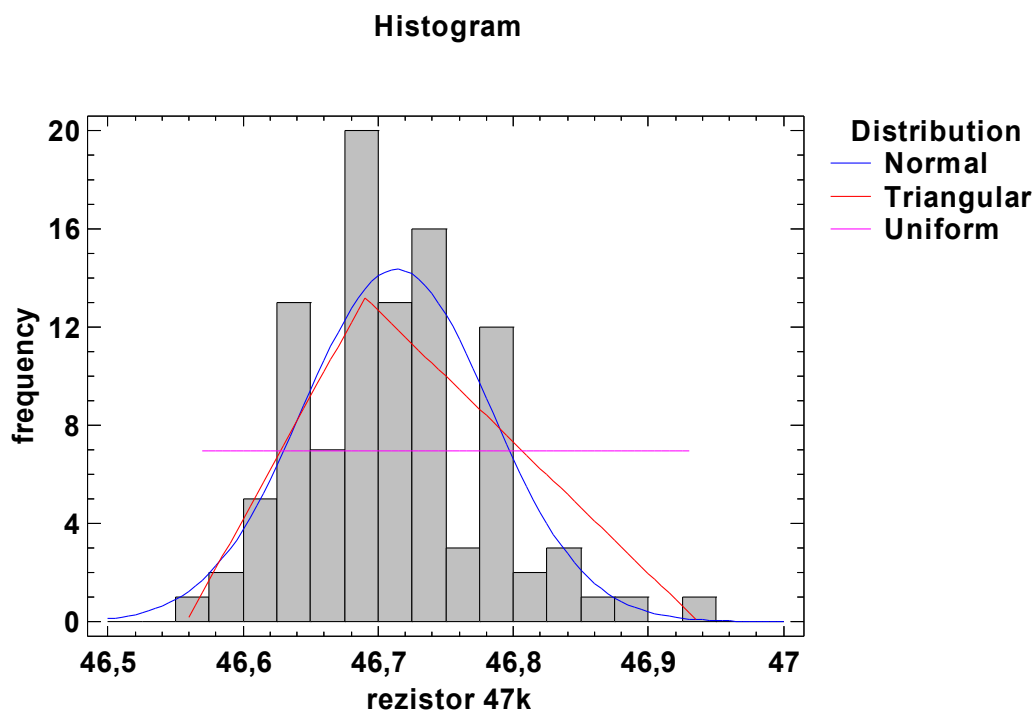
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	19,5541	25,3657	79,184
D.f.	10	9	11
P-Value	0,0337636	0,00259218	2,12175E-12

### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,107278	0,164531	0,281111
DMINUS	0,0628469	0,0238757	0,0866667
DN	0,107278	0,164531	0,281111
P-Value	0,200278	0,00890705	2,73615E-7

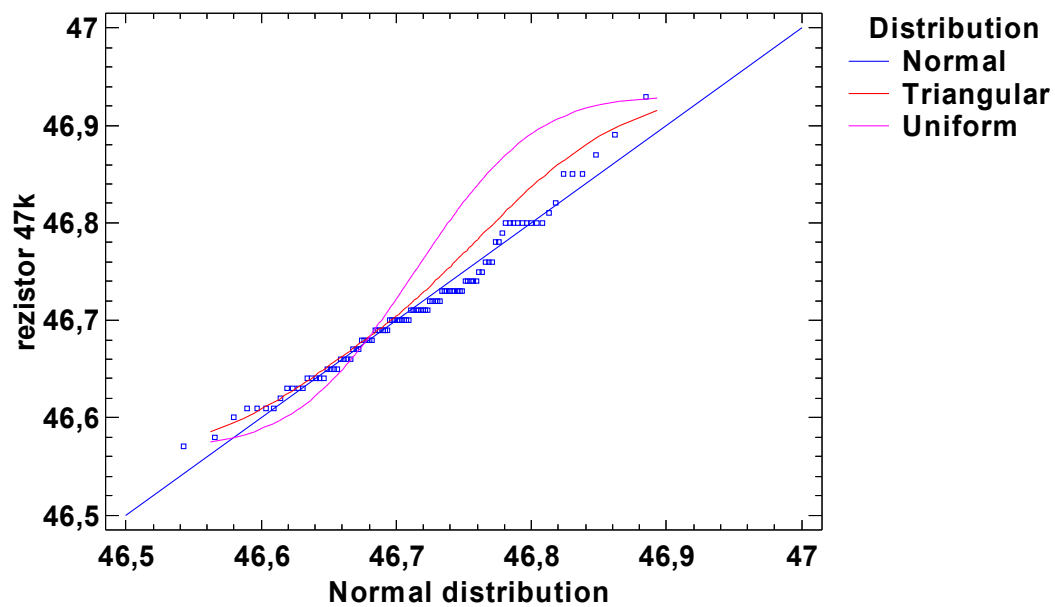
### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	0,844799	2,53596	
Modified Form	0,844799	2,53596	
P-Value	>=0.10	<0.05	



Obr. 8.18: Histogram měření rezistorů o odporu 47 kΩ multimetrem

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.19: Q-Q plot měření rezistorů o odporu 47 k $\Omega$  multimetrem

## Příloha 8: Měření rezistorů o odporu 680 kΩ multimetrem

### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 690,942	lower limit = 687,317	lower limit = 687,5
standard deviation = 1,50771	center point = 690,0	upper limit = 698,0
	upper limit = 698,142	

### Chi-Square Test

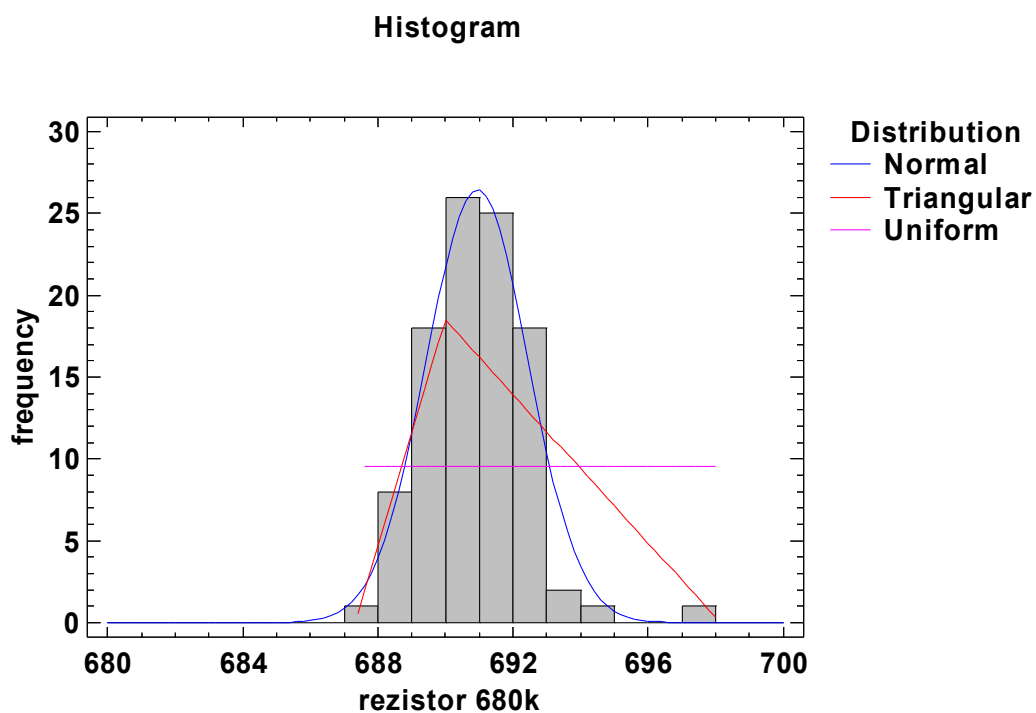
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	4,66989	36,3064	112,205
D.f.	5	5	8
P-Value	0,457479	8,24761E-7	0,0

### Kolmogorov-Smirnov Test

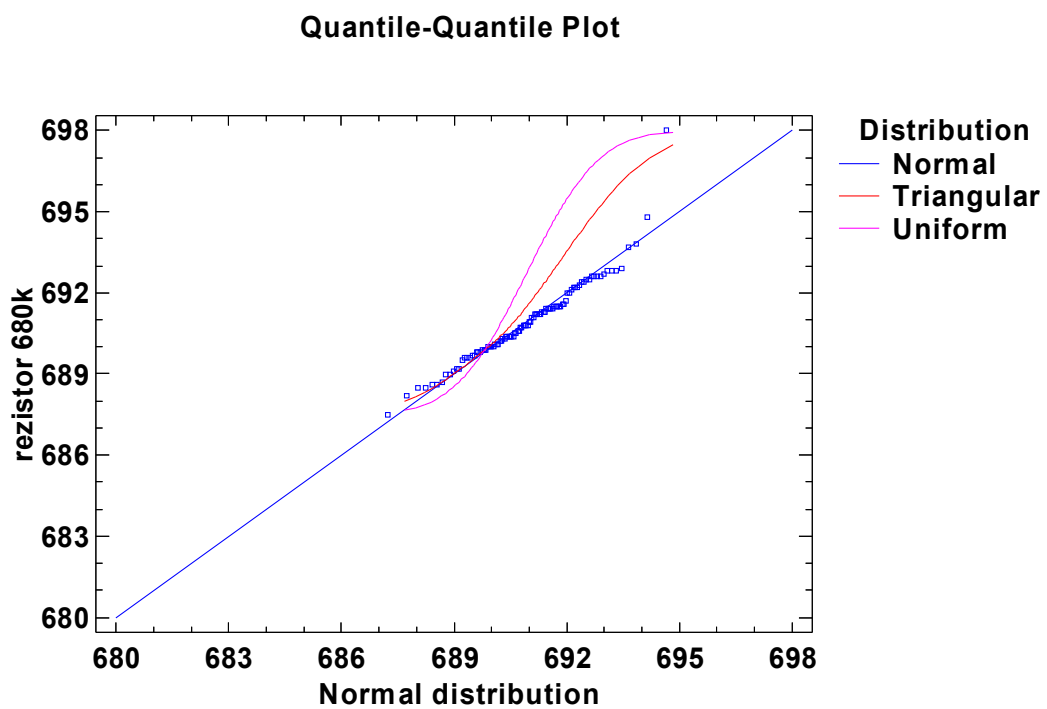
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,0856775	0,273758	0,445714
DMINUS	0,0566892	0,0494771	0,0752381
DN	0,0856775	0,273758	0,445714
P-Value	0,463527	6,18775E-7	0,0

### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	0,68395	9,75207	
Modified Form	0,68395	9,75207	
P-Value	>=0.10	<0.01	



Obr. 8.20: Histogram měření rezistorů o odporu 680 kΩ multimetrem



Obr. 8.21: Q-Q plot měření rezistorů o odporu 680 k $\Omega$  multimetrem

## Příloha 9: Kalibrace vah 200 g závaží

### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 207,79	lower limit = 196,827	lower limit = 198,0
standard deviation = 3,75323	center point = 212,0	upper limit = 215,0
	upper limit = 215,192	

### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	69,5657	53,0848	98,39
D.f.	8	7	9
P-Value	5,99654E-12	3,56693E-9	0,0

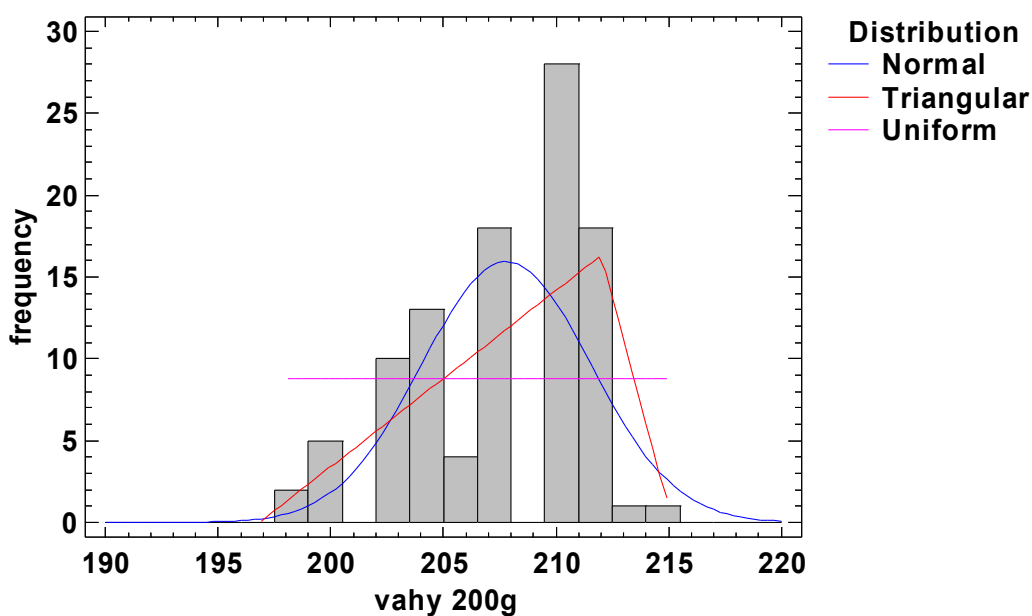
### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,110995	0,177241	0,156471
DMINUS	0,202012	0,102759	0,231765
DN	0,202012	0,177241	0,231765
P-Value	0,000570703	0,00373613	0,0000431932

### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

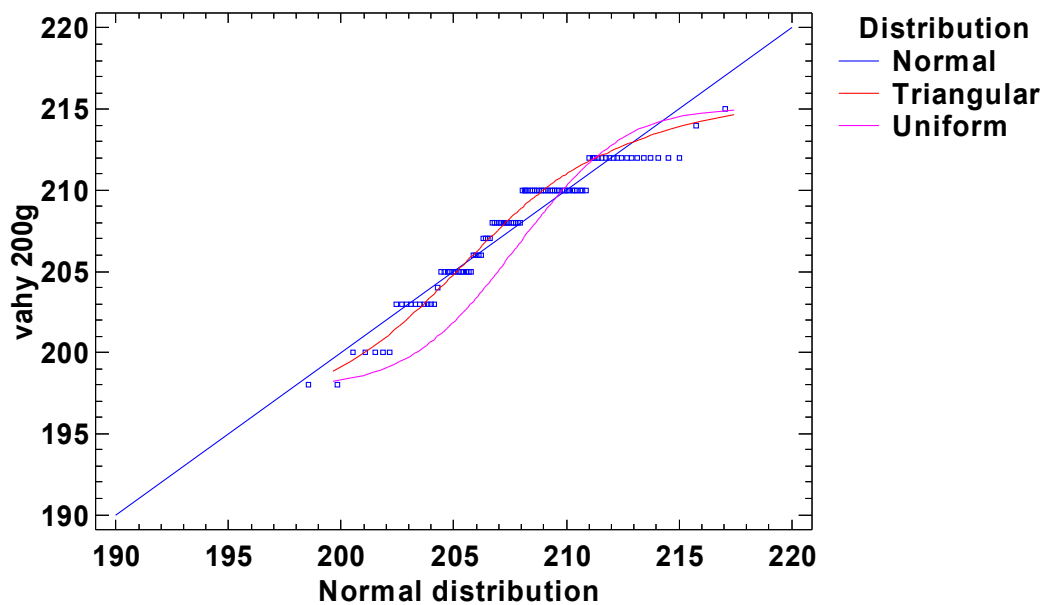
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	2,84055	2,46043	
Modified Form	2,84055	2,46043	
P-Value	<0.05	<0.10	

### Histogram



Obr. 8.22: Histogram kalibrace vah 200 g závaží

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.23: *Q-Q plot kalibrace vah 200 g závažím*

## Příloha 10: Kalibrace vah 600 g závaží

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 609,68	lower limit = 599,675	lower limit = 600,0
standard deviation = 3,30558	center point = 610,0	upper limit = 618,0
	upper limit = 618,607	

## Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	37,9286	46,5952	113,84
D.f.	7	7	10
P-Value	0,00000312636	6,69427E-8	0,0

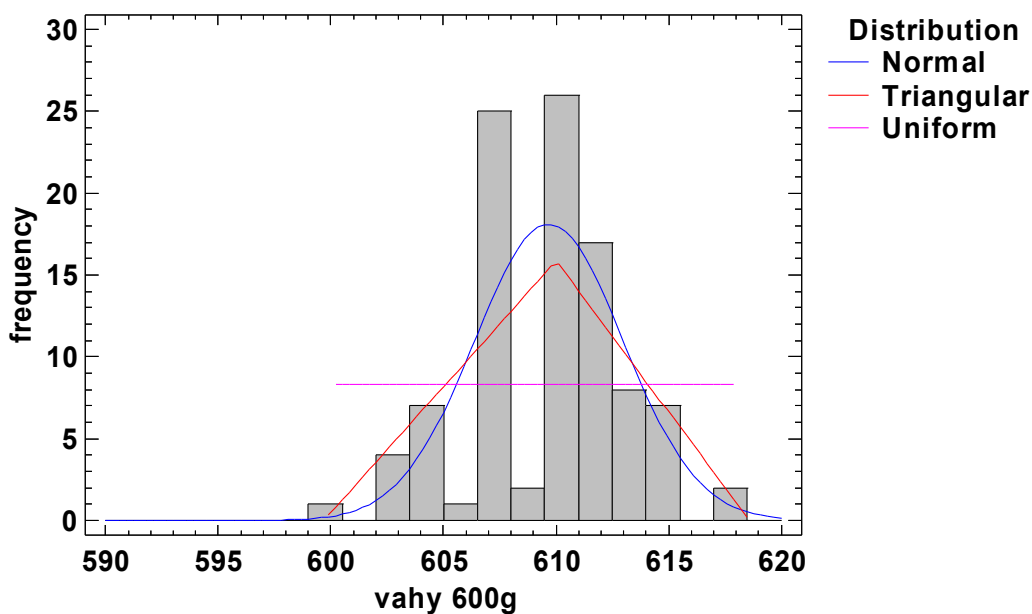
## Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,121438	0,114632	0,187778
DMINUS	0,138562	0,145368	0,258889
DN	0,138562	0,145368	0,258889
P-Value	0,0429913	0,0292106	0,00000301611

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

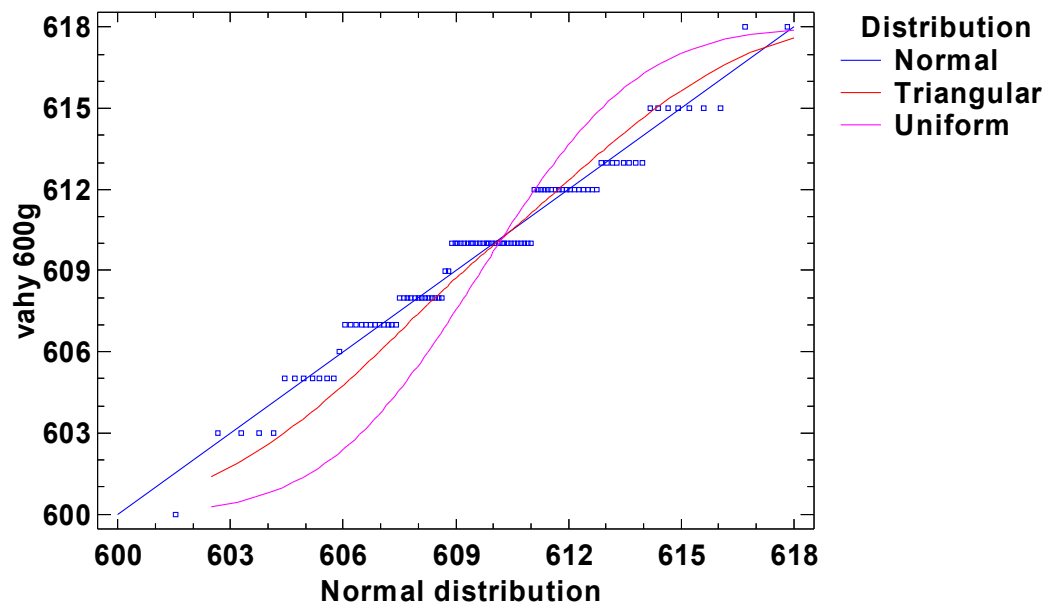
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	1,28779	2,44141	
Modified Form	1,28779	2,44141	
P-Value	>=0.10	<0.10	

## Histogram



Obr. 8.24: Histogram kalibrace vah 600 g závaží

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.25: Q-Q plot kalibrace vah 600 g závažím

## Příloha 11: Měření zrychlení akcelerometrem

### Osa x

Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 0,128309	lower limit = -0,0887695	lower limit = -0,0813477
standard deviation = 0,0699752	center point = 0,166302	upper limit = 0,288281
	upper limit = 0,293719	

Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	19,3835	23,6746	83,8542
D.f.	11	11	13
P-Value	0,054547	0,0141772	2,06624E-12

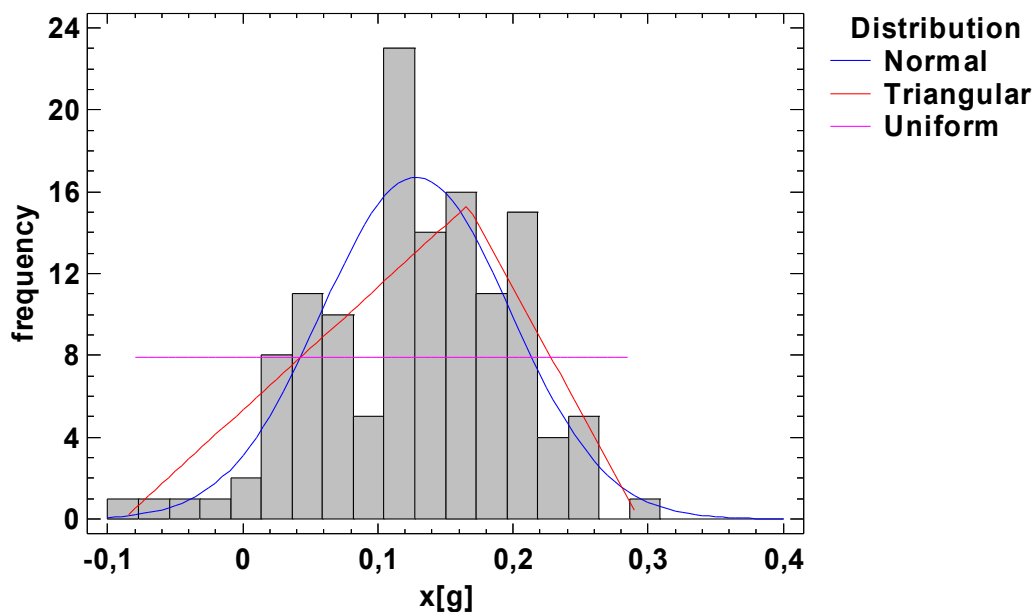
Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,0452302	0,0691666	0,134729
DMINUS	0,104258	0,105913	0,243488
DN	0,104258	0,105913	0,243488
P-Value	0,121101	0,110702	4,5508E-7

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

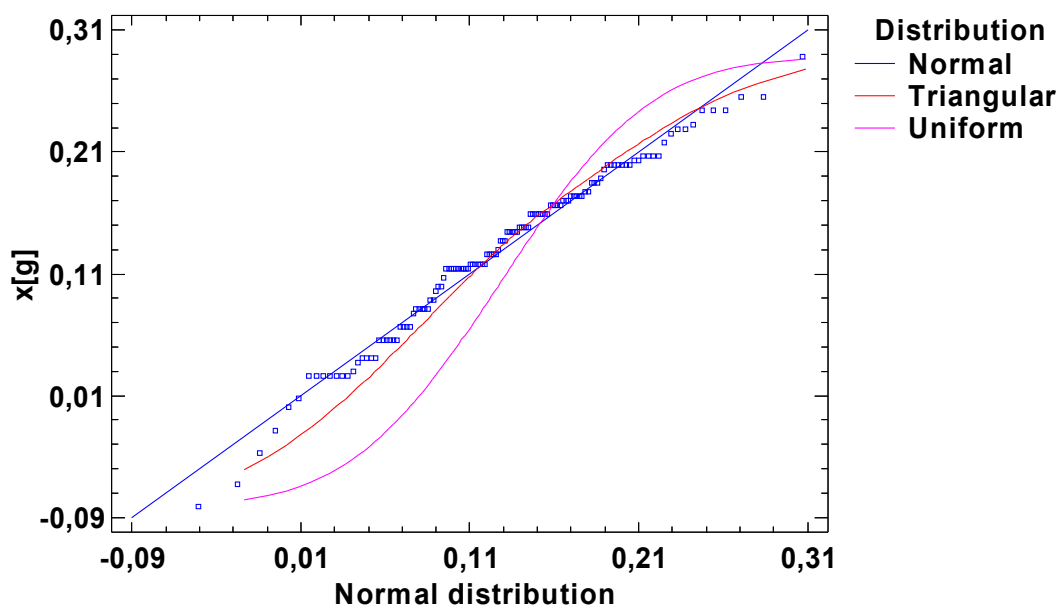
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	0,74965	1,36417	
Modified Form	0,74965	1,36417	
P-Value	>=0.10	>=0.10	

### Histogram



Obr. 8.26: Histogram měření zrychlení akcelerometrem osa x

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.27: Q-Q plot měření zrychlení akcelerometrem osa x

## Osa y

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 0,328224	lower limit = 0,00774345	lower limit = 0,158911
standard deviation = 0,0673275	center point = 0,380688	upper limit = 0,462007
	upper limit = 0,482111	

## Chi-Square Test

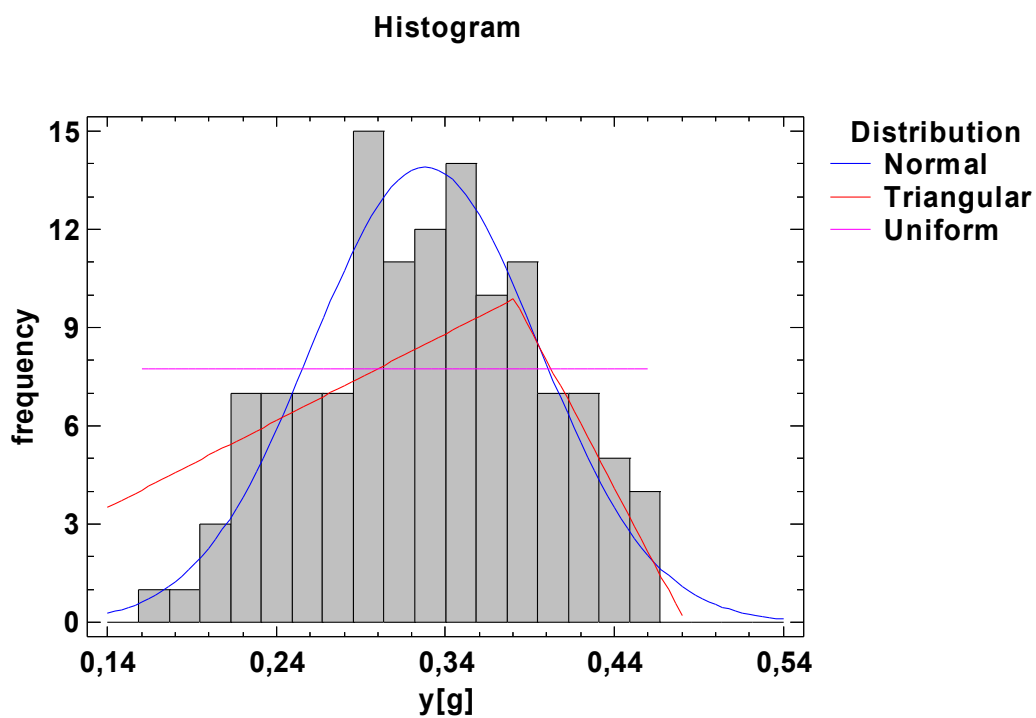
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	11,1439	36,7573	33,7696
D.f.	14	15	14
P-Value	0,674695	0,001373	0,0022284

## Kolmogorov-Smirnov Test

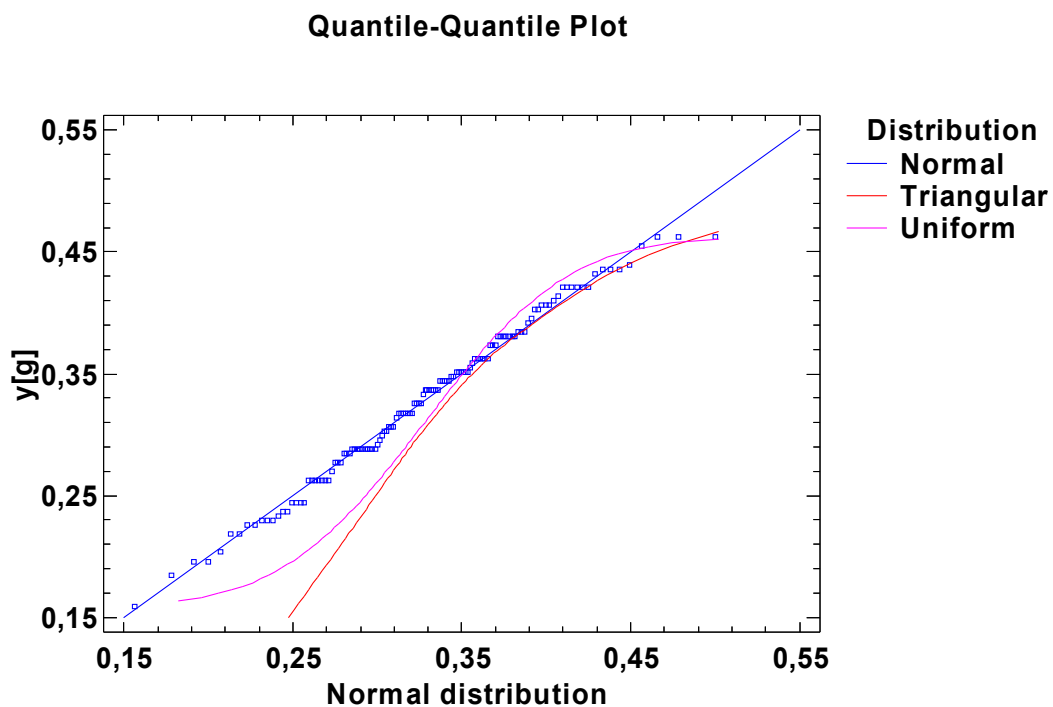
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,0568317	0,012459	0,070051
DMINUS	0,0518112	0,219298	0,194177
DN	0,0568317	0,219298	0,194177
P-Value	0,798971	0,00000817436	0,00011921

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	0,345999	9,70865	
Modified Form	0,345999	9,70865	
P-Value	>=0.10	<0.01	



Obr. 8.28: Histogram měření zrychlení akcelerometrem osa  $y$



Obr. 8.29: Q-Q plot měření zrychlení akcelerometrem osa  $y$

**Osa z**

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 0,345699	lower limit = 0,159446	lower limit = 0,164609
standard deviation = 0,060427	center point = 0,356816	upper limit = 0,475098
	upper limit = 0,488232	

## Chi-Square Test

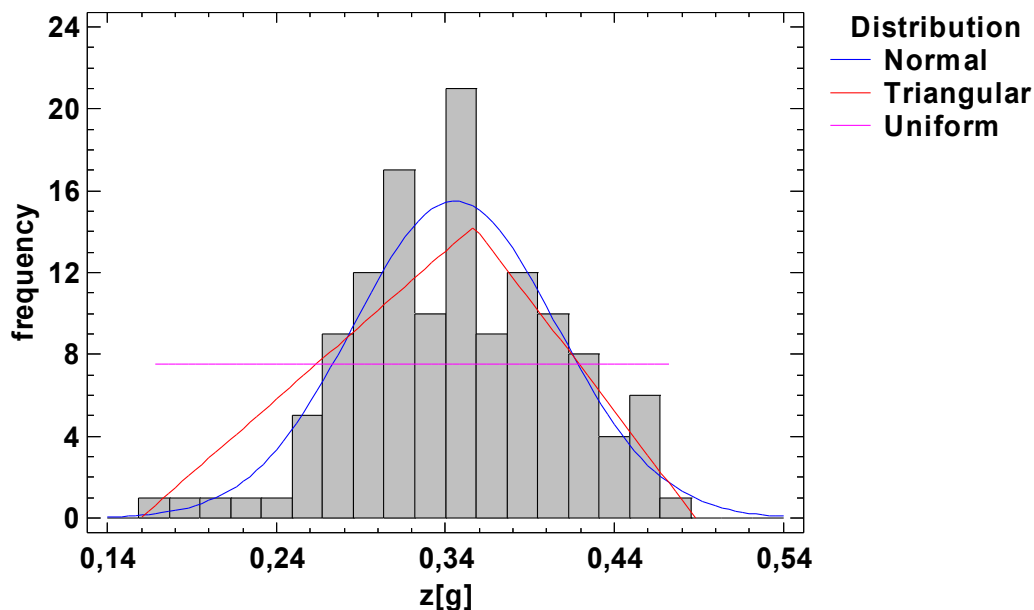
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	14,0007	20,1184	73,3899
D.f.	12	12	15
P-Value	0,300663	0,0648787	<b>1,10458E-9</b>

## Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,0590856	0,0211537	0,0741971
DMINUS	0,0488953	0,123904	0,264673
DN	0,0590856	0,123904	0,264673
P-Value	0,758675	<b>0,0380939</b>	<b>2,83041E-8</b>

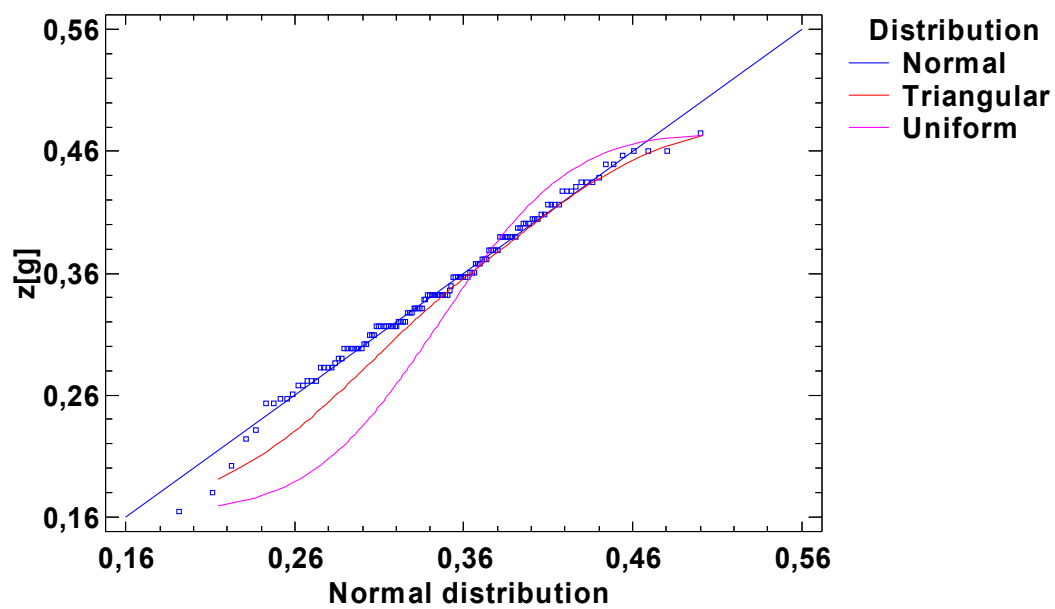
Anderson-Darling A<sup>2</sup>

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	0,320742	2,37394	
Modified Form	0,320742	2,37394	
P-Value	>=0.10	<0.10	

**Histogram**

Obr. 8.30: Histogram měření zrychlení akcelerometrem osa z

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.31: Q-Q plot měření zrychlení akcelerometrem osa z

## Příloha 12: Měření vibrací analyzátozem viditech

### Měření č. 1

#### Vibrace A

##### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 5,55946	lower limit = 5,33869	lower limit = 5,4
standard deviation = 0,0855273	center point = 5,6	upper limit = 5,7
	upper limit = 5,70917	

##### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	1269,36	1075,41	1580,09
D.f.	15	11	12
P-Value	0,0	0,0	0,0

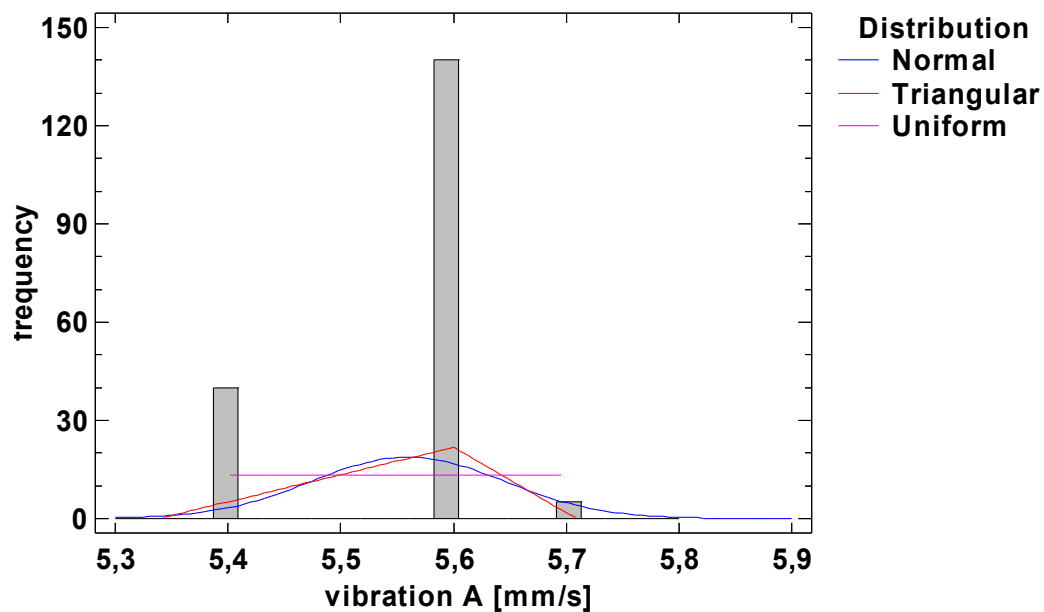
##### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,290719	0,267649	0,306306
DMINUS	0,466038	0,489108	0,45045
DN	0,466038	0,489108	0,45045
P-Value	0,0	0,0	0,0

##### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

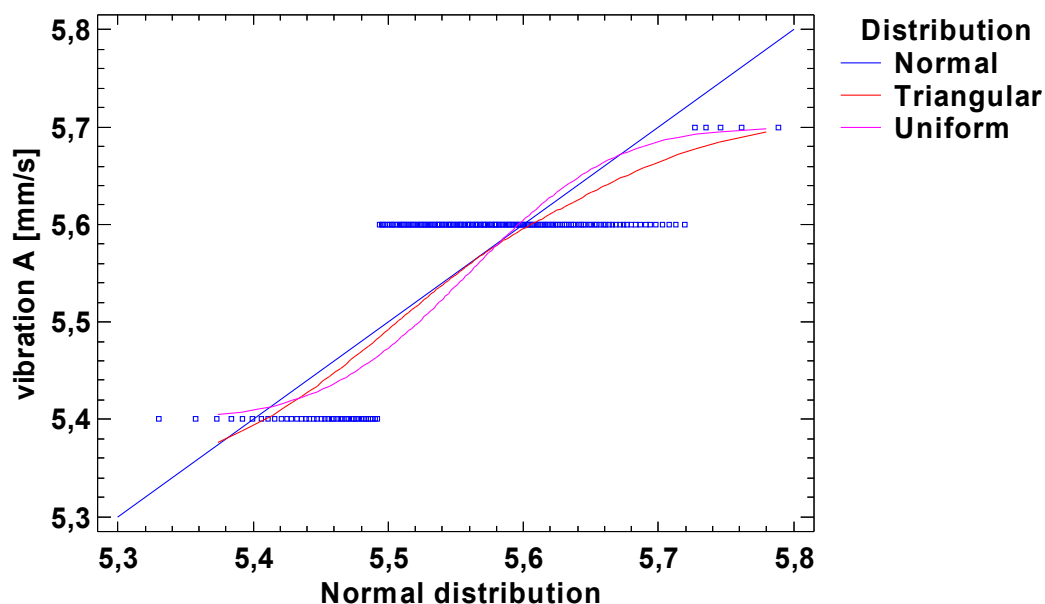
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	41,9759	43,5966	
Modified Form	41,9759	43,5966	
P-Value	<0.01	<0.01	

### Histogram



Obr. 8.32: Histogram měření vibrací analyzátozem viditech měření 1. vibrace A

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.33: Q-Q plot měření vibrací analyzátořem vidítech měřeni 1. vibrace A

## Vibrace B

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 2,6027	lower limit = 2,59866	lower limit = 2,6
standard deviation = 0,0162602	center point = 2,6	upper limit = 2,7
	upper limit = 2,70272	

## Chi-Square Test

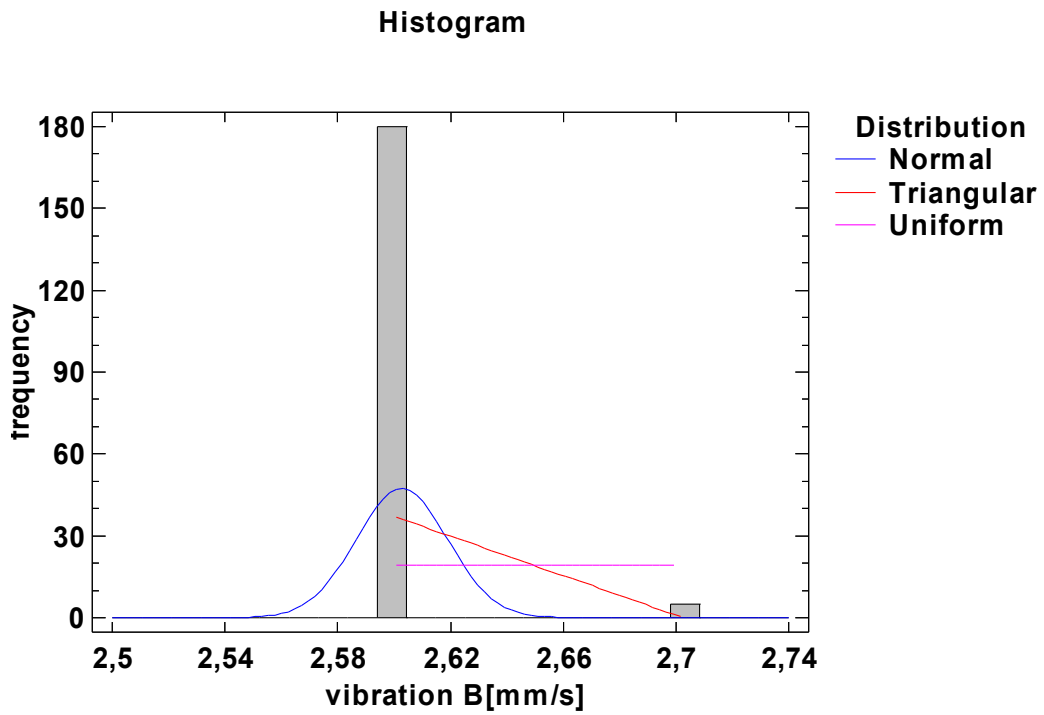
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	533,566	1671,9	3850,88
D.f.	5	6	8
P-Value	0,0	0,0	0,0

## Kolmogorov-Smirnov Test

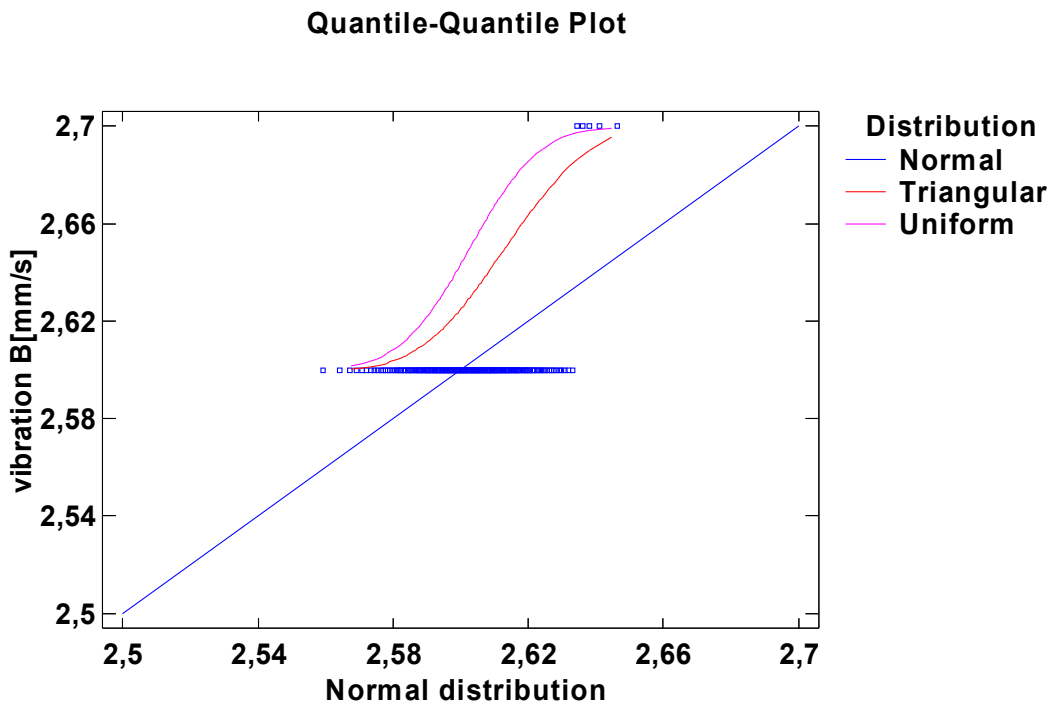
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,538982	0,960125	0,972973
DMINUS	0,433991	0,0263362	0,027027
DN	0,538982	0,960125	0,972973
P-Value	0,0	0,0	0,0

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	69,1941	581,015	
Modified Form	69,1941	581,015	
P-Value	<0,01	<0,01	



Obr. 8.34: měření vibrací analyzátořem viditech měřeni 1. vibrace B



Obr. 8.35: Q-Q plot měřeni vibrací analyzátořem viditech měřeni 1. vibrace B

## Měření č. 2

## Vibrace A

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 17,1675	lower limit = 16,7962	lower limit = 16,8
standard deviation = 0,108139	center point = 17,2	upper limit = 17,5
	upper limit = 17,5034	

## Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	524,666	647,14	1221,03
D.f.	12	13	16
P-Value	0,0	0,0	0,0

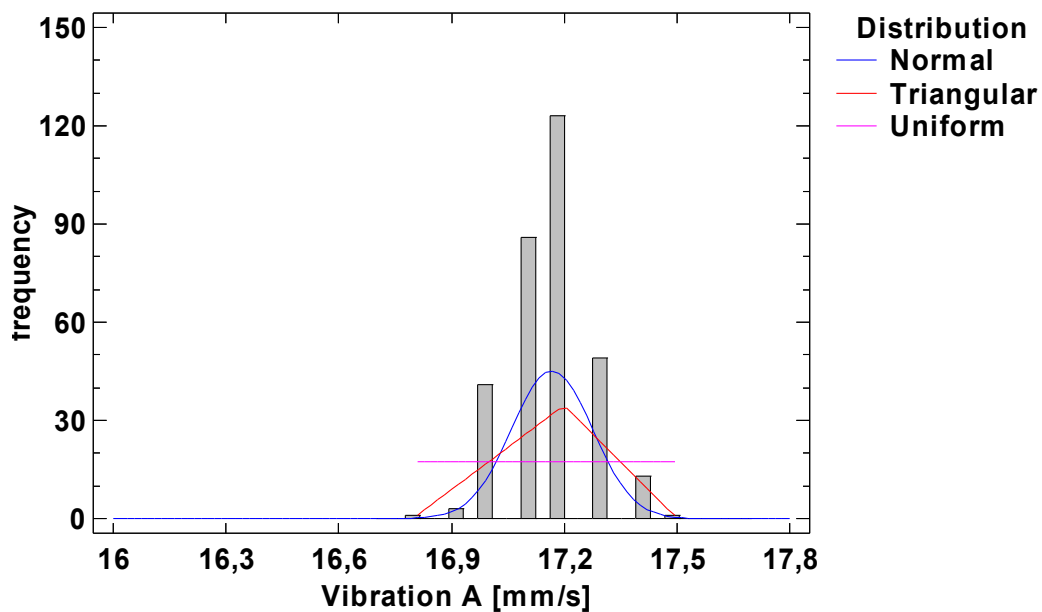
## Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,183171	0,230295	0,24155
DMINUS	0,204842	0,181242	0,286616
DN	0,204842	0,230295	0,286616
P-Value	0,0	0,0	0,0

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

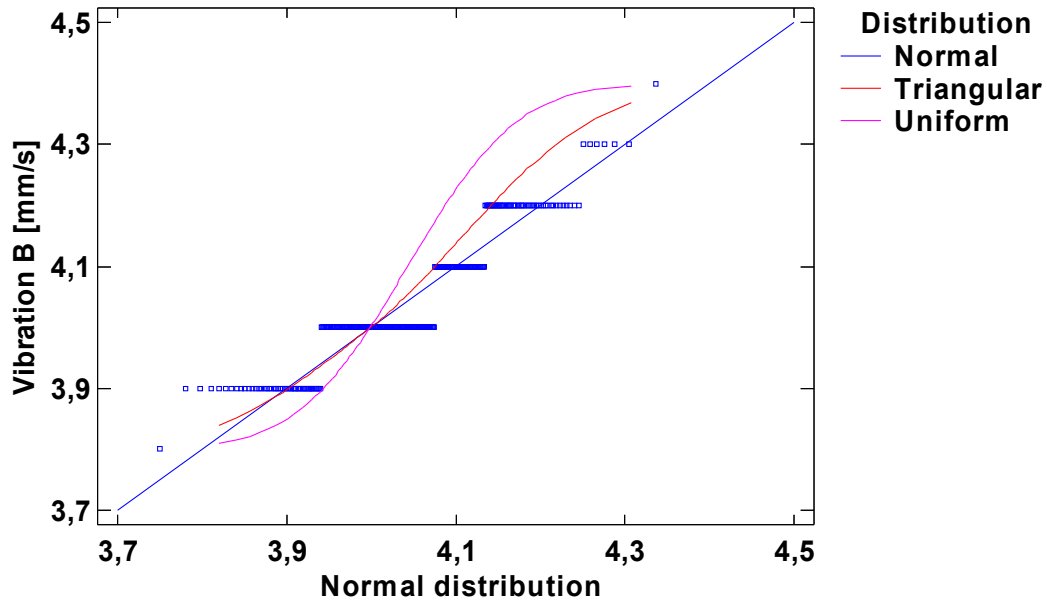
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	11,6029	16,6478	
Modified Form	11,6029	16,6478	
P-Value	<0.01	<0.01	

## Histogram



Obr. 8.36: Histogram měření vibrací analyzátořem viditech měření 2. vibrace A

### Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.37: Q-Q plot měření vibrací analyzátořem vidítech měření 2. vibrace A

### Vibrace B

#### Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 4,0429	lower limit = 3,79661	lower limit = 3,8
standard deviation = 0,102755	center point = 4,0	upper limit = 4,4
	upper limit = 4,40328	

#### Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	875,982	858,081	1557,56
D.f.	15	14	17
P-Value	0,0	0,0	0,0

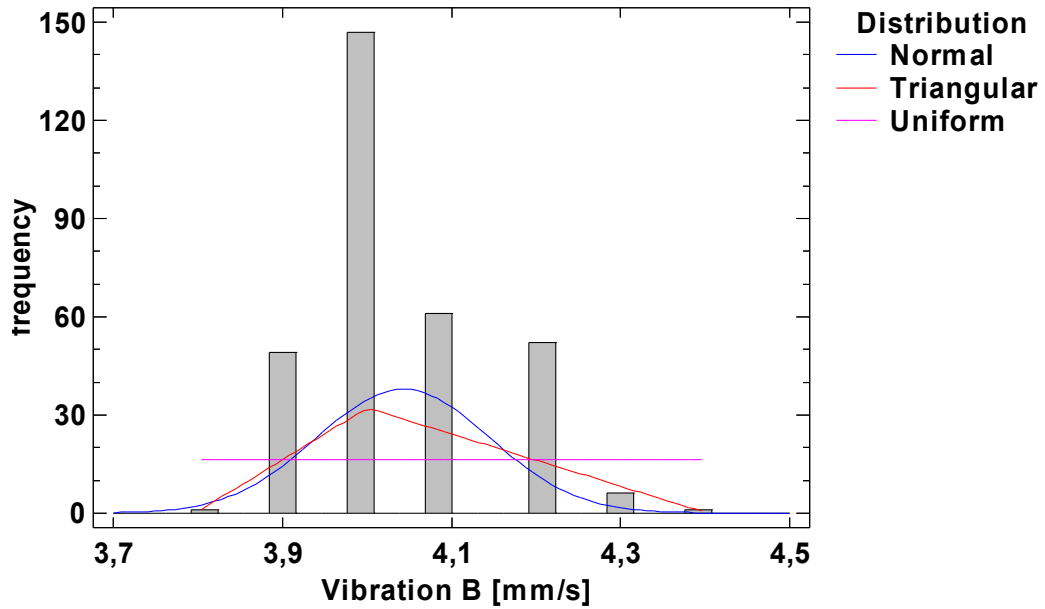
#### Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,283303	0,286192	0,31388
DMINUS	0,180419	0,177531	0,175605
DN	0,283303	0,286192	0,31388
P-Value	0,0	0,0	0,0

#### Anderson-Darling A<sup>2</sup>

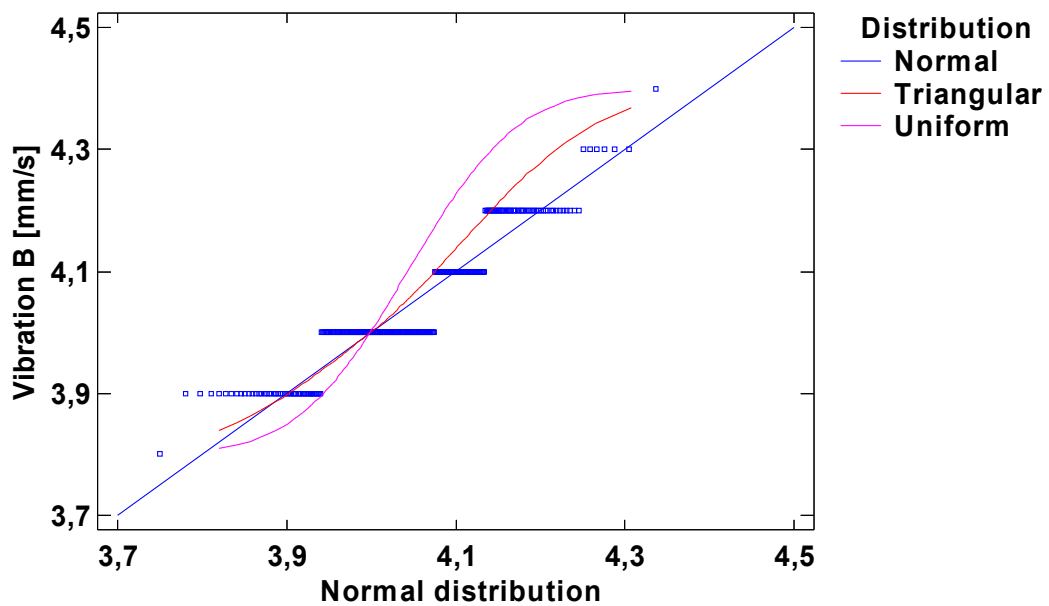
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	18,1929	21,445	
Modified Form	18,1929	21,445	
P-Value	<0,01	<0,01	

## Histogram



Obr. 8.38: Histogram měření vibrací analyzátozem viditech měření 2. vibrace B

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.39: Q-Q plot měření vibrací analyzátozem viditech měření 2. vibrace B

## Měření č. 3

## Vibrace A

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 11,3261	lower limit = 9,81835	lower limit = 9,9
standard deviation = 0,491327	center point = 11,3	upper limit = 13,2
	upper limit = 13,2771	

## Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	76,1209	149,736	338,494
D.f.	8	11	15
P-Value	2,94098E-13	0,0	0,0

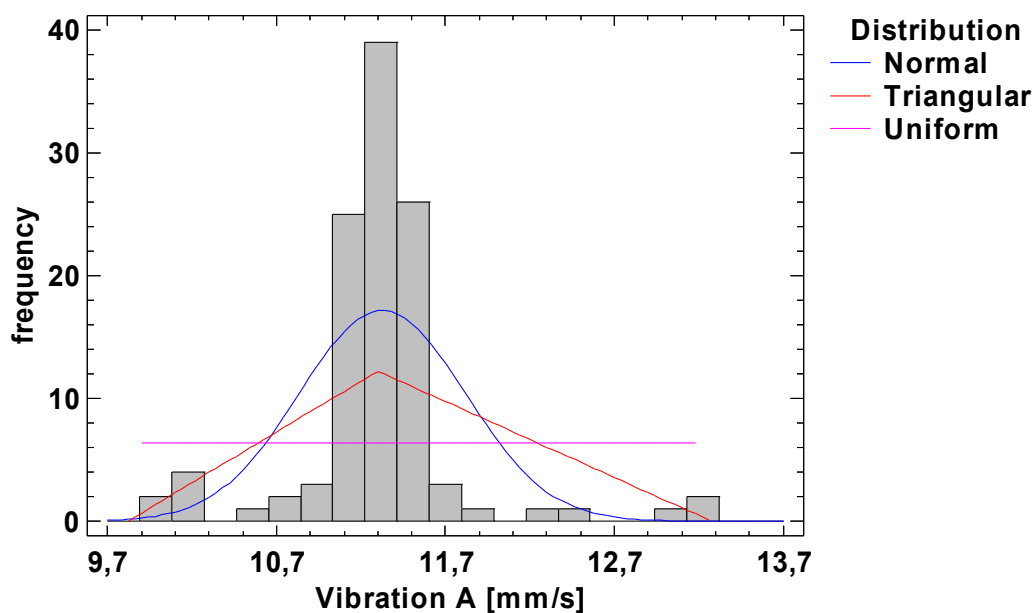
## Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,226575	0,330232	0,403767
DMINUS	0,214564	0,212424	0,255528
DN	0,226575	0,330232	0,403767
P-Value	0,0000224661	0,0	0,0

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

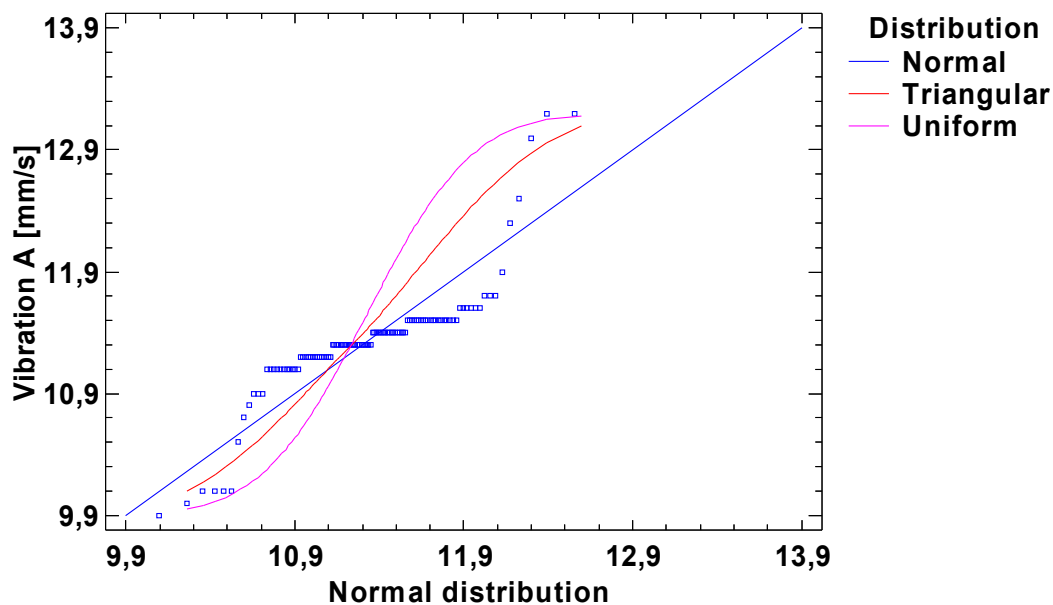
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	8,2561	14,3477	
Modified Form	8,2561	14,3477	
P-Value	<0.01	<0.01	

## Histogram



Obr. 8.40: Histogram měření vibrací analyzátořem vidítech měření 3. vibrace A

## Quantile-Quantile Plot



obr. 8.41: Q-Q plot měření vibrací analyzátořem viditech měření 3. vibrace A

## Vibrace B

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 8,31712	lower limit = 7,3	lower limit = 7,3
standard deviation = 1,3576	center point = 7,3	upper limit = 14,5
	upper limit = 14,6167	

## Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	331,02	349,15	719,65
D.f.	10	13	16
P-Value	0,0	0,0	0,0

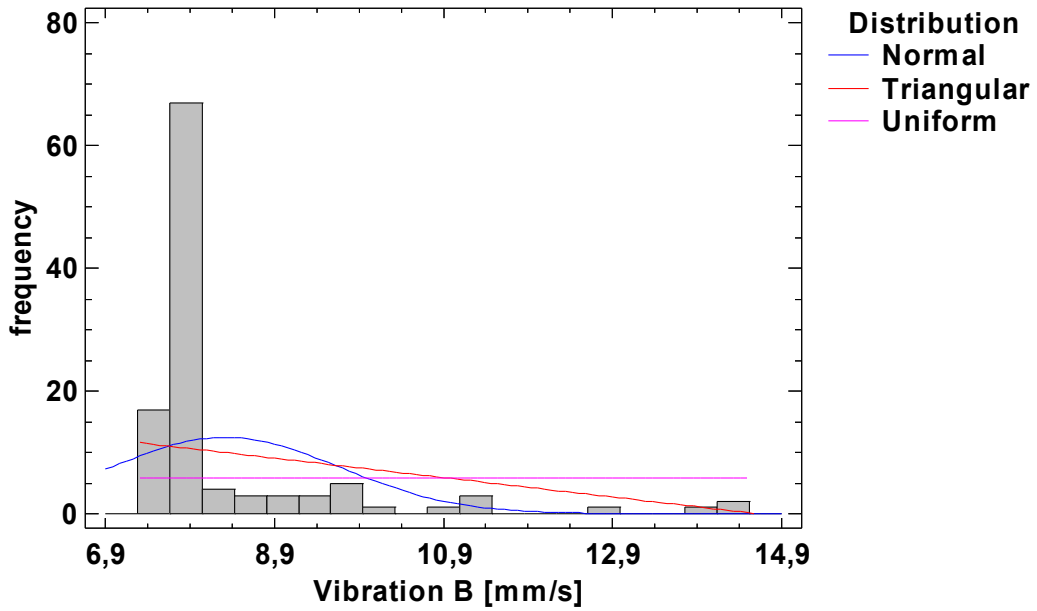
## Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,368422	0,590465	0,664414
DMINUS	0,255606	0,0359041	0,00975976
DN	0,368422	0,590465	0,664414
P-Value	0,0	0,0	0,0

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

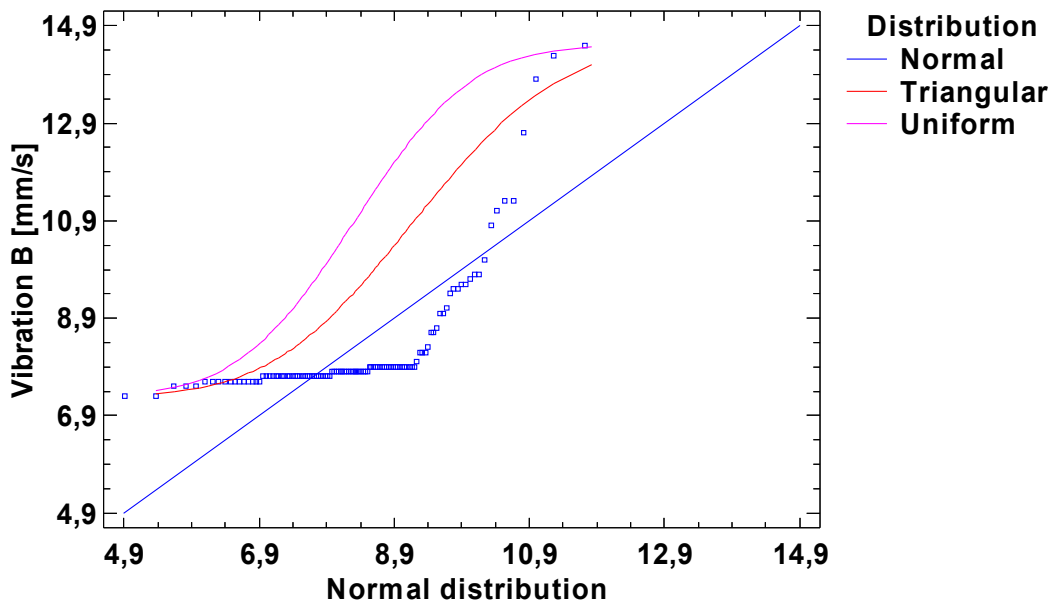
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	18,1066	64,2101	
Modified Form	18,1066	64,2101	
P-Value	<0,01	<0,01	

### Histogram



Obr. 8.42: Histogram měření vibrací analyzátozem viditech měření 3. vibrace B

### Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.43: Q-Q plot měření vibrací analyzátozem viditech měření 3. vibrace B

## Měření č. 4

## Vibrace A

## Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 31,2521	lower limit = 29,7921	lower limit = 29,8
standard deviation = 0,247153	center point = 31,4	upper limit = 31,9
	upper limit = 31,9217	

## Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	47,4152	286,644	773,696
D.f.	5	6	9
P-Value	4,67507E-9	0,0	0,0

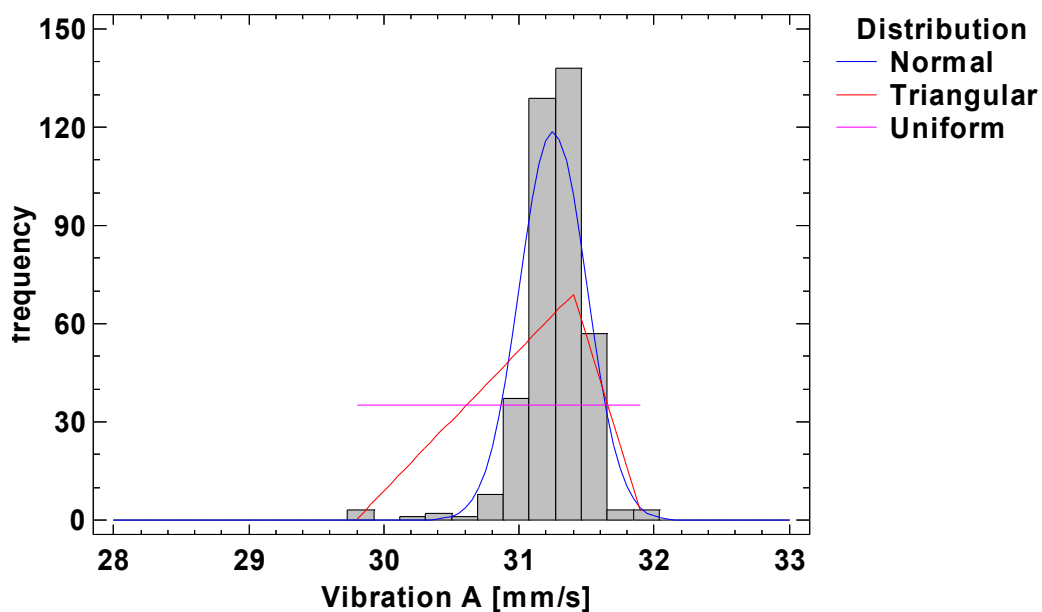
## Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,109851	0,0946236	0,12715
DMINUS	0,152131	0,363431	0,490277
DN	0,152131	0,363431	0,490277
P-Value	4,18724E-8	0,0	0,0

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

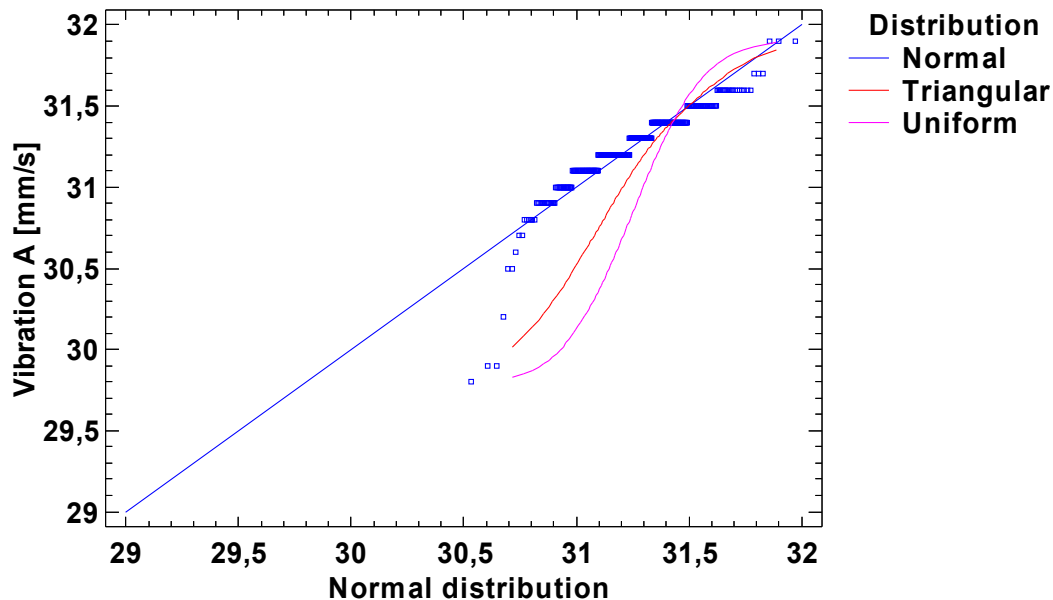
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	8,31548	64,8419	
Modified Form	8,31548	64,8419	
P-Value	<0.01	<0.01	

## Histogram



Obr. 8.44: Histogram měření vibrací analyzátozem viditech měření 4. vibrace A

### Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.45: Q-Q plot měření vibrací analyzátořem vidítech měření 4. vibrace A

### Vibrace B

Fitted Distributions

<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
mean = 28,0144	lower limit = 26,089	lower limit = 26,1
standard deviation = 0,234721	center point = 28,2	upper limit = 28,5
	upper limit = 28,5256	

Chi-Square Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
Chi-Square	124,806	524,017	1235,93
D.f.	6	11	13
P-Value	0,0	0,0	0,0

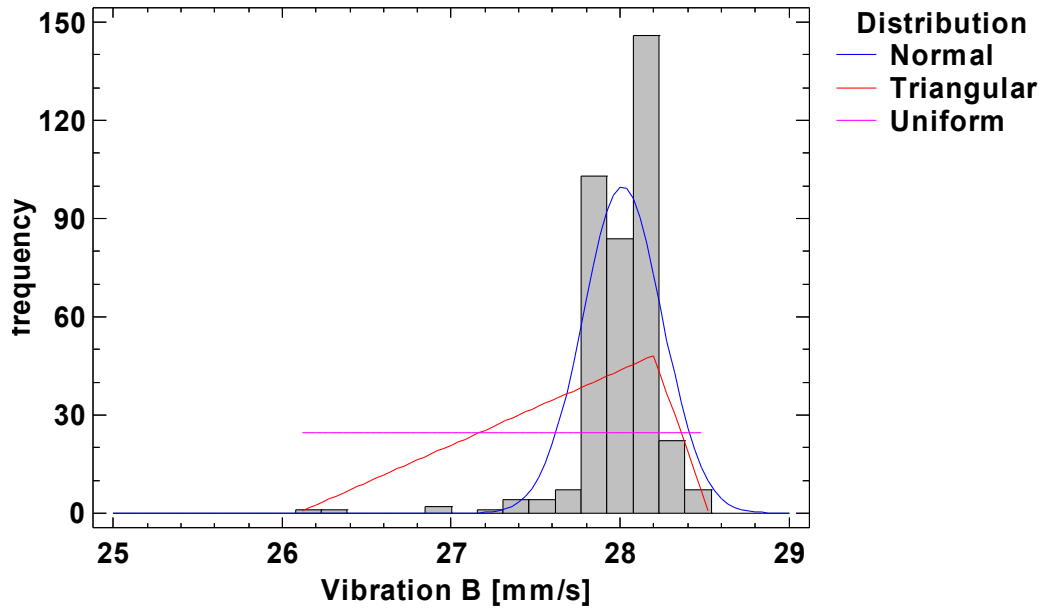
Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
DPLUS	0,138632	0,0577254	0,0650087
DMINUS	0,192575	0,5172	0,655977
DN	0,192575	0,5172	0,655977
P-Value	0,0	0,0	0,0

Anderson-Darling A<sup>2</sup>

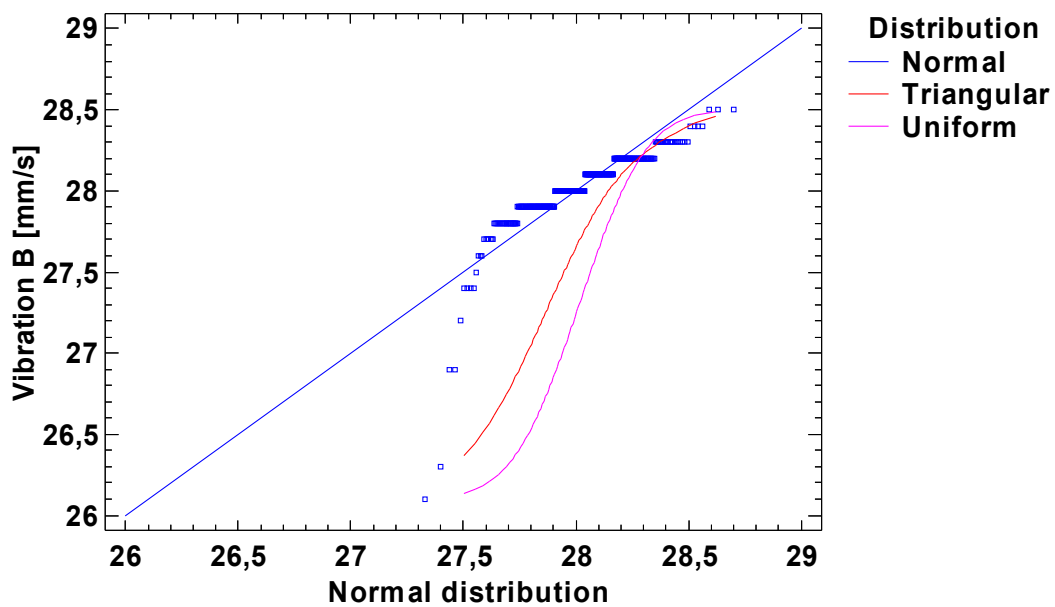
	<i>Normal</i>	<i>Triangular</i>	<i>Uniform</i>
A <sup>2</sup>	14,7629	140,186	
Modified Form	14,7629	140,186	
P-Value	<0,01	<0,01	

## Histogram



obr. 8.46: Histogram měření vibrací analyzátozem viditech měření 4. vibrace B

## Quantile-Quantile Plot



Obr. 8.47: Q-Q plot měření vibrací analyzátozem viditech měření 4. vibrace B